INSTITUTE OF ECONOMICS
Centre for Economic and Regional Studies

KRTK KTI

Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont
KÖZGAZDASÁG-TUDOMÁNYI INTÉZET

CERS-IE WORKING PAPERS | KRTK-KTI MŰHELYTANULMÁNYOK

Economics Models (not only for high school students)

András Simonovits

CERS-IE WP – 2019/3
February 2019

https://www.mtakti.hu/wp-content/uploads/2019/02/CERSIEWP20193.pdf

INSTITUTE OF ECONOMICS, CENTRE FOR ECONOMIC AND REGIONAL STUDIES,
BUDAPEST, 2020

ABSTRACT

The book analyzes more than two dozens economics models. Their order follows the order of the mathematical difficulties and tries to avoid the use of higher mathematcs (the calculus and matrices). At the same time, the book relies on mathematical methods and introduces the reader to the fields of dynamics, optimization and the probability theorry. Following my own research interest, I discuss several problems of the pension systems. The theoretical analysis is frequently completed by empirical and model tables and charts.

JEL codes: A21, C61, C70, D10, D20, H55, J11

Keywords: economics models, dynamic analysis, optimization, pension systems

András Simonovits
IE-CERS

Budapest, Tóth K. út 4, 1097, Hungary
e-mail: Simonovits.andras@krtk.mta.hu

Közgazdasági modellek (nemcsak középiskolásoknak)

Simonovits András

ÖSSZEFOGLALÓ

Közgazdasági modellek (nemcsak középiskolásoknak)

Ez a könyv több, mint kéttucat közgazdasági modellt elemez. A sorrend a matematikai nehézségeket követi, és igyekszik elkerülni a nem középiskolai matematikát (kalkulust, mátrixszámítást). Ugyanakkor erősen támaszkodik a matematikai érvelésre, és betekintést nyújt a dinamika, a szélsőérték-számítás és a valószínűségi módszerek titkaiba. Saját kutatói érdeklődésem követve részletesen foglalkozom a nyugdíjrendszer kérdéseivel. Számos esetben empirikus és modelltáblázatok és ábrák egészíti ki az elméleti érvelést.

JEL: A21, C61, C70, D10, D20, H55, J11

Kulcsszavak: közgazdasági modellek, dinamikus elemzés, optimalizálás, nyugdíjrendszerek

Közgazdaságtani modellek (nemcsak középiskolásoknak)

Simonovits András

2020. június 21.

email: simonov@econ.core.hu
KRTK KTI, BME MI

Előszó

Ebben a könyvben a közgazdaságtani modellek világába vezetem be a matematikában jártas középiskolásokat, tanáraikat és más érdeklődőket. Tömör könyvem nem tömeges oktatást szolgál. Viszont haszonnal forgathatják azok az olvasók, akik túl akarnak lépni a közgazdasági közhelyeken (például: „addig nyújtózkodjál, ameddig a takaród ér"), és igényes középiskolai szinten képesek követni és alkalmazni a matematikai gondolkodásmódot. Hajlandók képleteket böngészni, és levezetéseket megérteni.

A 19. században a közgazdaságtan zöme nélkülözte a (matematikai) modelleket, azóta viszont egyre növekszik a szerepük. Ez a folyamat egyrészt szabatosabbá és számszerűsíthetővé teszi a közgazdaságtant, másrészt öncélú matematikai ujjgyakorlattá silányíthatja azt. Remélem, az előadandó modellek valóban segítenek a valóság jobb megértésében és a matematika viszonylag új alkalmazásainak elsajátításában.

Nem követtem a hagyományos közgazdasági tankönyveket, amelyek eleve mikro- és makrorészre különülnek el. (Ettől függetlenül érdemes elolvasni egy jó közgazdasági bevezetést, pl. Horváth Áron ajánlotta a figyelmembe a The Core Teams: The Economy c. könyvét, amely a világhálóról is letölthető.) A mikróban az egyéni fogyasztói és termelői választás után eljutnak a piaci egyensúlyhoz; a makróban pedig a növekedés és az infláció után az egyéb problémákhoz. A témák kiválasztásakor legfontosabb szempontom az volt, hogy lehetőleg középiskolás szinten érthető, ugyanakkor érdekes és fontos modelleket mutassak be. Az utolsó pillanatban még egy járványmodellt is sikerült becsempésznem a könyvbe.

A bemutatott modellek egy részét a KöMaLban (Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok) már publikáltam. Ezek és más modellek bonyolultabb változatban előfordultak társszerzőkkel írott cikkeimben. Ehelyütt mondok köszönetet társszerzőimnek ábécé sorrendben: Czeglédi Tibornak, Eső Péternek, Garay Barnabásnak, Király Balázsnak, Király Júliának, Molnár Györgynek, Szabó Endrének, Tir Melindának és Tóth Jánosnak. Mérő László könyvét (Mérő, 1996) szabadon használtam a játékelméleti bevezetőben, és Eső Péter is segített kigyomlálni néhány bántó pongyolaságot.

Hálával tartozom Halpern Lászlónak, Katona Tamásnak, Király Júliának, Oblath Gábornak és Rézmovits Ádámnak egy-egy adatsorért, Ferenczi Miklósnak a valószínűségszámítási, Fleischer Tamásnak a közjavakról szóló gondolataiért, Kőrösi Gábornak és Vincze Jánosnak a statisztikai rész konstruktív bírálatáért, Polónyi Jánosnak a járványügyi részhez fűzött tanácsaiért, Réti Jánosnak a nyugdíjrészek kommentálásáért. Különleges köszönet illeti Horváth Dianát, Juhász Péternek, Király Júliát, Rácz Andrást, Simonovits Miklóst, Szabó Juditot és Széphelyi Attilát, akik a könyv egy-egy korábbi változatát részletesen átnézték. Sokat tanultam Tóth Attilától (Fazekas Mihály Gyakorló Iskola 11. évfolyamos diákja), akivel hónapokon át hetente 1–1 órában átbeszéltük az anyagot. Köllő János győzött meg arról, hogy az ábrák ebben a könyvben is nélkülözhetetlenek; kivitelezésük Fried Katalint és Juhász Lehelt dicséri. Hálás vagyok Drága Balázsnak, Hámori Veronikának, Pataki Jánosnak (középiskolai tanároknak) és Lovics Gábornak, valamint

Somlai Péternek, akik figyelmeztettek arra, hogy könyvemben milyen nehézségekkel találja szembe magát egy közgazdaságban járatlan önálló olvasó: például mi egy absztrakt dinamikus rendszer, mi az árszabályozás? Külön nehézséget jelenthet a szöveg tömörsége. Sajnos, csak részben sikerült eleget tennem kritikai észrevételeiknek. A megmaradó hibákért kizárólag a szerzőt terheli a felelősség.

Számos hazai és külföldi egyetemen tanítottam diákokat és tanultam diákjaimtól. Köszönet illeti a jelenlegi Budapesti Corvinus Egyetemet, a Rajk László Szakkollégiumot, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemet és a Közép-Európai Egyetemet (CEUt) a tanítási és tanulási lehetőségekért. Egyes fejezetek írását a K 108668. és a 129078. pályázat támogatta.

A könyv számos példát és feladatot tartalmaz, ez utóbbiak megoldása a könyv végén található. Azt tanácsolom az Olvasónak, hogy először próbálja meg a feladatokat saját maga megoldani, és csak kellő mennyiségű próbálkozás után forduljon a feladatmegoldásokhoz. Néhány feladat megoldásához számítógépes programra van szükség, ezek megírását nyomatékosan javaslom. A 18. és 19. fejezet statisztikai feladatainak megoldásához ingyen szoftverek is rendelkezésre állnak. A nehezebb fogalmakat a könyv végén fogalomtárban foglalom össze.

Mivel tankönyvről van szó, fölöslegesnek tartottam részletes hivatkozásjegyzékkel terhelni az Olvasót. Csak néhány esetben tüntettem föl a forrást, például a társszerzős vagy a KöMaLban megjelent cikkeimet. De nem fukarkodtam a modellek kapcsán nevekkel és az évszámokkal, ezek alapján az Olvasó a világhálón tovább érdeklődhet, s láthatja a fejlődés kanyargós útját.

Saját középiskolai élményeim alapján meg vagyok győződve arról, hogy a könyvet – részben vagy egészben – érdemes lenne középiskolás matematikai szakkörökön feldolgozni. Bár az itt előadott témák gyakran nélkülözik a tiszta matematika eleganciáját, elősegíthetik az alkalmazott matematika újabb lehetőségeinek megismerését. De a közeljövőben legfeljebb egy-két ilyen szakkörrel számolhatok (2019. szeptemberében a Fazekasban elindult az első szakkör), ezért az olvasók jelentős része nem mondhat le a könyv tartalmának önálló elsajátításáról. Két megjegyzést tennék a matematika fizikai és közgazdasági alkalmazásának középiskolás fokon adódó különbségéről: *1.* mindenki tanul fizikát, nagyon kevesen tanulnak közgazdaságtant (ez utóbbi egyébként kiküszöbölendő hiba); *2.* bizonyos fizikai fogalmak (tehetetlenség, munka stb.) ellentmondanak a hétköznapi tapasztalatoknak, míg a zsebpénzét beosztó és pályát választó középiskolásnak nehéz közgazdasági feladatokat kell megoldania.

A tartalomjegyzékben *-gal jelölt fejezetek vagy alfejezetek viszonylag nehezek, első olvasásra kihagyhatók.

Kiegészítésként megemlítem, hogy egyes témák vetítéses kidolgozása megtalálható a honlapomon:

https://kozgazmodellek.wordpress.com/

kedvcsináló: komal1, 3. fejezet: jatek1, 8. fejezet: moral, 9. fejezet: nep-sl, 10. fejezet: nyug-sl és csebisev, 11. fejezet: onkent, 12. fejezet: valind-szirak, 13. fejezet: jelzalog1, 14. fejezet: karrow.

Kérem az olvasókat, hogy megjegyzéseiket jutassák el a következő címre:

simonov@econ.core.hu

Köszönettel

Simonovits András

Tartalomjegyzék

Görög kisbetűk

A könyvben sokszor használunk görög kisbetűket, főleg együtthatók jelölésére. Igyekszünk úgy megválasztani őket, hogy „rímeljenek” a megfelelő latin betűre: például x és ξ. A középiskolások egy része nem ismeri az összes görög kisbetűt, ezért a görög ábécé sorrendjében sorfolytonosan nevesítve felsoroljuk őket.

Görög betűk listája

α = alfa	β = béta	γ = gamma	δ = delta	ε = varepszilon
ζ = dzéta	η = éta	θ = teta	ι = jóta	κ = kappa
λ = lambda	μ = mű	ν = nű	ξ = kszi	ϑ = vartheta
π = pi	ρ = ró	σ = szigma	τ = tau	φ = varfi
χ = khi	ψ = pszi	ω = omega		

Néha görög nagybetűt is használunk, mindenekelőtt a nagy szigmát az (a_i) számok összegének a jelölésére: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_i + \cdots + a_n$, de Ω = nagy omega.

Fontosabb jelölések jegyzéke

Memorizálást megkönnyítendő, alkalmanként a változó angol nevet is megadjuk. Sajnos, a szokás és a memorizálhatóság kedvéért időnként még egyes fejezeteken belül is azonos betűt kell alkalmaznnk különböző változókra, de az alfejezeteken belül ilyen egybeesés nincs. A sorvégi üres négyzet a bizonyítás végét jelöli.

Általános jelölések

t = időszak (time) indexe	x_t = t-edik állapot
i = szereplő (típus) indexe	f_i = i-edik típus részaránya
a, b, c, d = együtthatók	p, q = valószínűségek
$^{\mathrm{o}}$ = optimális/egyensúlyi	* = normális (egyensúlyi) érték
$\hat{x} = x - x^{\mathrm{o}}$ = eltérés	P = periódus
x = független változó	y = függő változó
x, y = fogyasztási pár	m = jövedelem
p, q = árak (price)	P = ár
u = hasznosságfüggvény	α = preferenciasúly
w = szuperbruttó bér (wage)	ν = létszám növekedési együttható
τ = nyugdíjjárulék-kulcs	θ = adókulcs
L = alacsony típus indexe (low)	H = magas típus indexe (high)
$\mathbf{E}$ = várható érték	$\mathbf{D}$ = szórás
ε = relatív hatékonyság	f = függvény
Y = GDP (kibocsátás)	

2. fejezet. Egyszerű lineáris dinamika

A = együttható	B = állandó
S_t = mértani sor összege	λ = megoldási hányados
K = tőke (capital)	s = megtakarítási hányad (saving)
I = beruházás (investment)	κ = reakcióegyüttható
j = tagország indexe	J = a tagországok száma
y_{jt} = a tagország fejlettsége	y_t =átlagos fejlettség
N_{jt} = a j-edik tagország létszáma	N_t = az unió összlétszáma
' = a kiválás utáni mutatók	ν_t = a kilépő tagország relatív súlya
D = kereslet (demand)	S = kínálat (supply)
P_t^{e} = árvárakozás	ω = adaptációs súly
D = adósság (debt)	
B = költségvetési egyenleg (balance)	E = elsődleges egyenleg
d = adósságráta	e = egyenlegráta
r = kamatláb (rate)	$R = 1 + r$ = kamategyüttható
G = növekedési együttható (growth)	$\rho = R/G$ = relatív kamategyüttható

3. fejezet. Játékelméleti bevezető és optimalizálás

s = stratégia	S = stratégiahalmaz
p = valószínűség	q = valószínűség
A = számtani közép	G = mértani közép
λ = súly	

4. fejezet. Bonyolultabb lineáris dinamika

A_1 = első együttható	A_2 = második együttható
λ_k = alapmegoldás hányadosa	ξ_k = alapmegoldás együtthatója
n = a skalárváltozók száma	x_i = az i-edik változó
x_i' = a transzformált i-edik változó	d_i = szomszédok távolsága
ξ = alapmegoldás együtthatója	r = amplitúdó
P = periódus	φ = szögsebesség
δ = fázisszög	a = csillapítási együttható
I = beruházás	C = fogyasztás
ψ = üzembe helyezési arány	A = autonóm
β = akcelerátor	γ = fogyasztási hajlandóság

5. fejezet. Fogyasztói döntések és hasznosságmaximum

ε = árrugalmasság (elasticity)	η = jövedelemrugalmasság
M = összjövedelem	M_α = súlyozott összjövedelem
$MU_x = \frac{\partial}{\partial x}U(x,y)$ = x szerint határhaszon	
c = jelen fogyasztás	d = jövő fogyasztás
e = későbbi fogyasztás	
δ = leszámítolási együttható (discount)	φ = hiperbolikus leszámítolási együttható
w = életpálya-kereset	s =megtakarítás (saving)

6. fejezet. Vállalati döntések

F = termelési függvény	Q = kibocsátás (quantity)
K = tőke (capital)	L = munka (labor)
α, β = együtthatók	
$G_x = x$ növekedési együtthatója	$g_x = x$ növekedési üteme
$k = K/L$ = tőkeellátottság	$l = L/Y$ = munkaigény
C = költség (cost)	π = profit
M = monopólium	C = verseny (competition)

7. fejezet. Stabilitás, ciklus és káosz

f, g = függvény	L = tágulási korlát
φ, ψ = szögsebesség	$^{\mathrm{p}}$ = tervezett (planned)

8. fejezet. Adómorál és adózás: három modell

d = szórás	h = max-min hányados
I = típusok száma	μ = adómorál
γ = alapjövedelem	e = jövedelem-eltitkolás
w_{m} = minimális bér	w_{M} = maximális bér

9. fejezet. Népességdinamikai modellek (fh.= függőségi hányados)

N = népességszám	B = születésszám (birth)
E = halálozási szám (exit)	K_t = gyermekszám (kid)
$b = B/N$ = születési arány	$e = E/N$ = halálozási arány
M = dolgozók száma	P = nagyszülők száma (pensioner)
$k = K/M$ = fiatalkori fh	$p = P/M$ = időskori fh
$d = (K + P)/M$ =teljes fh	$f_k = k$ gyermekesek aránya
Q = munkába lépés kora	R = nyugdíjba vonulási kor (retirement)
D = halálozási életkor (death)	F = szülési kor
φ = teljes termékenységi arány	d = differenciál

10. fejezet. Elemi tb-nyugdíjmodellek

u = bruttó bér	v = nettó bér
b = nyugdíj (benefit)	γ = helyettesítési arány
μ = munkarészvételi hányados	ζ = nyugdíjjogosultsági hányados
p = rendszer-függőségi hányados	$*$ = demográfiai mutatók jele
Q = munkába lépési életkor	R = nyugdíjba vonulási kor (retirement)
D = halálozási életkor (death)	z = életpálya-egyenleg

11. fejezet. Önkéntes nyugdíjrendszer

S = szolgálati idő	T = nyugdíjban töltött idő
$\eta = S/T$ = eltartási arány	ρ = munka/felnőtt élettartam
α = támogatási arány	γ = megtakarítási hajlandóság
ε_{I} = belső szórás (internal)	ε_{E} = külső szórás (external)
e = életpálya-fogyasztás	

12. fejezet. Nyugdíjindexálás

$\mathbf{G}$ = halmozott növekedési tényező	
S = szolgálati idő	T = nyugdíjban töltött idő
P_t = árszint	$\eta = S/T$ eltartási arány
$\mathbf{b}_t$ = folyóáras nyugdíj	$\mathbf{v}_t$ =folyóáras nettó bér
b_t^{v} = bérindexált nyugdíj t-ben	b_t^{p} = árindexált nyugdíj t-ben kezdve
E = munkavállaló indexe (employee)	F = munkáltató indexe (firm)
k = életkor,	$b_{k,t} = k$ éves nyugdíj, t-ben
γ = általános helyettesítési arány	ι = bérindex súlya

13. fejezet. A jelzáloghitel elemi modelljei

R = nominális kamategyüttható	B = nominális törlesztőrészlet
T = futamidő	D_t = tartozás (debt)a t-edik időszak végén
P_t = halmozott árindex	p = inflációs együttható
E = árfolyam (exchange)	F = reálárfolyam
$r = R/p$ = reálkamat együttható	ρ = forintos ekvivalens kamat eh.
d = reáltartozás	
b = reáltörlesztés	$e = E/E_{-1}$ = relatív árfolyam-változás
x^* = deviza változó	$\tilde{x}$ = forintosított devizaváltozó

14. fejezet. Egy általános egyensúlyelméleti modell

h = a háztartás (household) indexe	
v_h = a v termék kezdőkészlete	w_h = a w termék kezdőkészlete
x_h = a v termék cseréje	y_h = a w termék cseréje
n = termékek száma,	H = szereplők száma
c_i = tb-költség az i-edik szereplőnél	d_i = magánköltség az i-edik szereplőnél
$\bar{c}_i$ = az $i+1$-edik magánköltsége	

15. fejezet. Együtt élő nemzedékek modellje

y = fiatalkori jövedelem	z = időskori jövedelem
R = kamat együttható	g = átmenet függvénye

16. fejezet. Valószínűség-számítási bevezetés

ω_i = i-edik elemi esemény	p_i = i-edik elemi valószínűség
A, B = események	
$\emptyset$ = kizárt esemény	Ω = biztos esemény
q_j = másik peremeloszlás	r_{ij} = együttes eloszlás
X, Y = valószínűségi változó	S_n = átlag
μ = várható érték	σ = szórás
α, β = átmeneti valószínűségek	$p_{k,n}$ = binomiális eloszlás
$\mathbf{P}(\cdot)$ = valószínűség (probability)	ε = eltérés

17. fejezet. Biztosítás és szerencsejáték

d = kár (damage)	w = vagyon (wealth)
h = biztosítói haszon	π = haszonkulcs
p = kárvalószínűség	e = biztosítási díj
s = önrészesedés	ρ = morális kár együttható
c = fogadési díj	b = nyeremény

18. fejezet. Regressziószámítás és korreláció

m = tömeg (mass)	h = magasság (height)
X = független változó	Y = függő változó
β = regressziós együttható	α = regressziós állandó
e = hiba	r = korrelációs együttható
F = apa (father) magassága,	S = fiú magassága (son)

19. fejezet. Regressziószámítás közgazdasági alkalmazásai

y_i = GDP/fő	P_i = árszint
Q = munkába lépési kor	R = nyugdíjkor
S = szolgálati idő	φ = folytonossági együttható

20. fejezet. Járvány és válság

s_t = a megfertőzhetők részaránya	i_t = a fertőzők részaránya
r_t = a gyógyultak részaránya	
β = fertőzési ráta	γ = gyógyulási ráta

1. Bevezetés

A könyv bevezetője két alfejezetre oszlik. Az 1.1. alfejezetben röviden elmondjuk, hogy miért fontosak a közgazdaságtani modellek. Az 1.2. alfejezet áttekinti a könyv legfontosabb gondolatait.

1.1. Miért fontosak a közgazdaságtani modellek?

A modern világban minden felnőttnek gyakran kell gazdasági döntéseket hoznia: milyen foglalkozást választ, hol telepedik le, milyen valutában adósodik el, mikor megy nyugdíjba és sorolhatnánk az előttünk álló kérdéseket. Persze, az emberek többsége világszerte tájékozatlan, még a részvényt és a kötvényt sem tudja megkülönböztetni, zavarba jön a kamatos kamattól stb. Ennek ellenére a felnőtteknek valamilyen elképzelésük van a világról, és ez alapján döntenek a különféle közgazdasági kérdésekről. A népességben törpe kisebbséget alkotnak a közgazdászok; ők azok, akik azzal dicsekszenek, hogy értenek a közgazdaságtanhoz. A hozzáértés egyik (de nem szükséges és nem is elégséges) jele, hogy elképzeléseiket nyilvánosságra hozzák, sőt következtetéseikhez modellek segítségével jutnak el. A „profikon” kívül a matematikailag nyitott közembereknek is érdemes lehet betekinteni a közgazdaságtani modellekbe. A jövő matematikusainak pedig hasznos egy új alkalmazási területtel megismerkedniük.

De mi a modell? A valóságos folyamatok és összefüggések leegyszerűsített képe. Induljunk ki egy egyszerű modellből, a londoni metróvonalak sémájából, amely a világon elsőként ábrázolt metróhálózatot áttekinthetően, de leegyszerűsítve és torzítva. Egy világhálós cikk részletesen leírja a küzdelmet, amelynek végén a sémát elfogadták, hogy azóta a világ számos metrótérképét (a mienkét is) hasonlóan készítsék el. A metrótérkép csak a megállókra és a csatlakozásokra koncentrál, a valódi távolságokat nem arányosan mutatja. Ezért marad áttekinthető.

Ahogyan a térképek a földrajzi valóság egyszerűsített képei, a fizikai (például Galilei lejtője, 1638 előtt), kémiai (például Dalton atomelmélete, 1802), közgazdaságtani (Walras piaci ármechanizmusa, 1874–1877) stb. modellek a megfelelő tárgykör egyszerűsítései. A térképhez hasonlóan a jó modell segít, a rossz modell akadályoz a tájékozódásban. Már az ókorban is voltak elméleti és gyakorlati modellek (a kozmológiában, a statikában), de széles körben csak az utóbbi évszázadokban terjedtek el a természet-, majd a társadalomtudományban.

Mindenképpen különbséget kell tennünk a természet- és a társadalomtudományi modellek között. Egyrészt a természettudományban tipikusan sokkal egyszerűbb jelenségeket és folyamatokat modelleznek, mint a társadalomtudományban. (A Naprendszer bolygóinak mozgása sokkal egyszerűbb és sokkal változatlanabb, mint egy piac áraié!) Másrészt a természetben általában sokkal könnyebb és olcsóbb kísérleteket végezni, mint a társadalomban. Harmadrészt, míg a természettudományban az elmélet nincs befolyással a vizsgálat tárgyára, addig a társadalomtudományban erős a befolyás. (Például a Föld ugyanúgy keringett a Nap körül Kopernikusz előtt, mint utána; de a kellő felügyelet nélkül hagyott jelzálog-piacok az elméleti tisztázatlanság miatt komoly válságot okoztak napjainkban.)

A jó közgazdasági modellek is elvonatkoztatnak a vizsgált jelenségek lényegtelen részleteitől. A lényeges összetevőkre és kapcsolatokra egyszerűsítve a problémát, tömör magyarázatot adnak egy jelenségre. Például, a keresleti és kínálati függvény bevezetésével érthetővé válik, hogy jól működő piacokon létezik olyan ár, amely mellett a kereslet és a kínálat egyensúlyban van. (Ez a mechanizmus sem működött a szocializmusban. Ahogyan a korabeli vicc mondta: a szocialista hiánygazdaságban egy fürt banánért is a Bécsi út másik végébe, Bécsbe kellett utazni!)

A rossz közgazdasági modell viszont a lényeget hagyja figyelmen kívül, és leragad a másodlagos jelenségeknél. Például a modern közgazdaságtan egyik ikonja, Robert Lucas 1987-ben „kiszámította”, hogy a II. világháború utáni amerikai visszaesések társadalmi költsége (jóléti vesztesége) minimális, azaz ha lenne egy tökéletes jövedelembiztosítás (vö. 17.2. alfejezet), akkor szinte ingyen ki lehetne simítani a gazdasági hullámokat (vö. 4.4. alfejezet). Az „egyszerűség kedvéért” (hogy számolása elférjen egy boríték hátán) eltekintett attól, hogy a társadalom nem homogén, és egy csődbe menő iparág válságövezetben lakó munkása egészen másképpen éli át az időleges visszaesést, mint a Chicagói Egyetem Nobel-díjas professzora. Ha ezt a bonyodalmat figyelembe vesszük, akkor a társadalmi költség biztosan számottevő (vö. 17.2. táblázat).

Megismételjük: minden modellkészítőnek egyensúlyoznia kell az egyszerűség és a realizmus között. Például amikor azt vizsgáljuk, hogyan függ egy termék iránti kereslet a termék árától, akkor gyakran eltekintünk bizonyos minőségi és területi különbségektől: például a magasabb oktánszámú benzin drágább, mint a normál; a benzin ára adott időpontban változik a kút helyétől függően (az autópályán drágább). Ezeken a különbségeken túllépve igaz, hogy amikor a benzin ára csökken, akkor növekszik a fogyasztása. (Kivétel a koronavírus, mert eltolódik a keresleti görbe: az emberek nem járnak dolgozni stb.)

Honnan lehet tudni, hogy egy modell jó-e vagy rossz? Szükséges-e, hogy valósághűek legyenek a feltevései, vagy elegendő, ha az előrejelzései jók? A 20. század sztárközgazdásza, Milton Friedman nevezetes 1953-as cikkében amellett érvelt, hogy felesleges a feltevések realizmusára törekedni; elegendő, ha a modell jól jelzi előre a magyarázandó jelenségeket. (Mivel Friedman kivételes közgazdász volt, konkrét modelljeiben ritkán tévedett.) Koopmans (1957) és Kornai (1971) nem fogadták el Friedman álláspontját, és hangsúlyozták, hogy a közgazdaságtan nemcsak előrejelzésre szolgál, hanem a valóság megértését is elősegíti. Márpedig ha a valóságtól idegenek a feltevések, akkor a modell akadályozhatja a megértést, és az esetleges sikeres előrejelzés lehet csupán véletlen („vak tyúk is talál szemet”). És hogyan választunk két modell között, ha hasonló előrejelzéseket adnak?

1.2. Legfontosabb gondolatok

A könyv a Bevezetésen (és az Utószón) kívül 19 fejezetből áll, amelyek egymástól jelentős részben függetlenül olvashatók. Nem próbáltam meg a hagyományos közgazdaságtani bevezetéseket követni, inkább a matematikai nehézségek növekvő sorrendje szerint haladtam. Igyekeztem minden modellt számokkal kitölthetően megadni, viszont kevés ábrát szerepeltettem. Lehetséges, hogy a könyv túlzottan tükrözi saját felfogásom, de remélem, hogy hasznosan egészítem ki a hagyományosabb tárgyalásokat.

A könyv legfontosabb gondolatai a következőképp foglalhatók össze.

- **Optimalizálás.** A hagyományos közgazdaságtan legkedvesebb témaköre az egyéni választás, *optimális döntés*. Hogyan osztja meg havi jövedelmét egy család az élelem, a ruházkodás és a lakás között? Hogyan dönt egy vállalat arról, hogy mennyire gépesíti a termelést? Mindkét típusú szereplők feltételek mellett optimalizálják a célfüggvényüket. Ezek a modellek érdekes és fontos eredményeket adnak. Különösen fontos a piaci elosztás vizsgálata, ahol az eladók és a vevők – felső beavatkozás nélkül – saját érdekeiket követve cserélik áruikat és szolgáltatásaikat. Ebben a keretben az általános egyensúlyelmélet kimondja, hogy bizonyos feltételek mellett a *piac optimális*, tehát egy felsőbb szerv sem tudna jobb elosztást kitalálni – ez a gondolat minden szabad társadalom egyik alappillére. Ugyanakkor ezek a modellek gyakran eltúlozzák a döntéshozók racionalitását. (Ma már a közgazdászok modellezik a korlátozott racionalitást is: az ún. *hiperbolikus leszámítolásnál* a fogyasztó minden időszakban a következő időszakra halasztja az időskorra szükséges megtakarítást.) Hasonló hiba azoknak a körülményeknek az elhanyagolása, amelyek miatt a piaci önszabályozás jelentős kiegészítésre szorul: nyomor, környezetszennyezés, versenykorlátozás stb.

• **Dinamika.** Meg vagyok győződve arról, hogy a közgazdaságtanban még ma is túlteng a *statikus* megközelítés, ahol a döntések időtlenek. Ennek ellensúlyaként már a könyv elején elkezdjük a *dinamikus* modellek tanulmányozását, ahol a rendszer állapota időszakról időszakra változik: a múlt határozza meg a jelent. Alkalmazási területeink: növekedés, árigazodás, államadósság változása, és beruházási ciklusok – először a lineáris modellekre szorítkozva, ahol az egyensúlytól mért kezdeti eltérés megkétszerezése a többi eltérést is megduplázza. Általában időben állandó együtthatós rendszereket vizsgálunk, de a *nyugdíjindexálás* kérdéskörében kénytelenek vagyunk időben változó együtthatókra kiterjeszteni az elemzést.

Külön kiemelem a *nemlineáris* dinamikus modelleket. A *ciklikus* folyamatok (ahol az állapotsorozat egy idő után megismétlődik) tárgyalhatók lineáris keretben is, de ez a közgazdaságtanban pengeélen táncoló feltevéseket igényel. (A Naprendszer bolygói évmilliárdokig keringenek a Nap körül – alig változó pályákon, a közgazdasági folyamatok mechanizmusai szinte évről évre változnak.) Ezért érdemes nemlineáris keretben is tárgyalni a ciklusokat, ahol sokkal természetesebbé és robusztusabbá (a feltevésekre nem túl érzékennyé) válnak. Emellett megjelennek az ún. *kaotikus* folyamatok is, amelyek korlátosak, de tömérdek egymáshoz nagyon közeli állapotból induló pályapár is időnként nagyon eltávolodik egymástól. (Ha csak egy érzékeny állapot van, mint például a merev inga felső egyensúlyi pontja, az még kezelhető.) Az érzékenység miatt a kezdőállapot legkisebb megfigyelési hibája is megnehezíti, sőt kizárja a hosszabb távú előrejelzést. (Időjárás esetén a hosszabb táv 10 nap!) Nemlineáris dinamikához jutunk a csak haladó kurzusokon tárgyalt *együtt élő nemzedékek* modelljében és a szomorúan időszerű *járványmodellben* is.

• **Állam/Kormányzat.** Az általános egyensúlyelmélet egyik hiányossága, hogy nem garantálja: minden részvevő elegendő jövedelemhez jut. A modern államokban a jövedelmeket legegyszerűbben *személyi jövedelemadó* kivetésével lehet újra elosztani, amelyből a kormány alapjövedelmet ad, és az állampolgárok ingyenes szolgáltatásokat vásárolnak. Az újraelosztásnak azonban korlátot szab a dolgozók reakciója: a túlzottnak érzett adóztatás esetén nem dolgoznak eleget, és elégtelen *adómorál* miatt eltitkolják adóköteles jövedelmük egy részét. Az itt tárgyalt modell megadja, hogyan kell a kormányzatnak korlátoznia önmagát, hogy a két szempontot – elégséges minimáljövedelmet és elegendő adóbevételt – harmonizálja.

Saját érdeklődésemet követve több fejezetben is modellezem a *nyugdíjrendszert*. A kötelező tb-rendszerben elvben a mindenkori dolgozók járulékából fedezik a mindenkori nyugdíjakat. Ezért fontos a teljes népességen belül az idősek és a fiatalok létszámaránya (a demográfia). Bonyolultabb elemzésben figyelembe kell vennünk, hogy az időben és egyénileg változó nyugdíjba vonulási kor osztja ketté a két korosztályt nyugdíjasokra és dolgozókra.

Csak futólag modelleztem a máskülönben nagyon fontos és érdekes *egészségügyi biztosítást*. A legtöbb fejlett országban van kötelező egészségügyi biztosítás, és ahol nincs, az Egyesült Államokban, ott hiánya sok gondot okoz.

• **Véletlen jelenségek.** Az egyszerűség jegyében hajlamosak vagyunk elhanyagolni a *véletlen* jelenségeket. Pedig már a bevezető *játékelméleti modellben* is szükség van véletlen döntésre, például, hogy ellenfelünk elől eltitkoljuk szándékunkat (jobbra vagy balra rúgom a büntetőt, jobbra vagy balra vetődöm). Az egészségügyi biztosításban is az okozza az egyik nehézséget, hogy a biztosító nem tudja, milyen az egyes biztosítottak egészségi állapota, miközben a biztosítottak tudják. Ez az aszimmetrikus információ megakadályozhatja, hogy az önkéntes egészségügyi biztosítás eléggé széleskörű legyen.

A véletlen matematikáját *valószínűség-számításnak* nevezik, amely egyszerű és gyakran ismétlődő események valószínűségéből kiszámítja a bonyolultabb események valószínűségét. Könyvünk megpróbálja a valószínűség legfontosabb fogalmait egyszerűen, de szabatosan tárgyalni. Például a *várható érték* mellett elemezzük a *szórást*, a *függetlenség* mellett a *korrelációt*. A *nagy számok egyik törvényét* is levezetjük: ha egyforma és független korlátos valószínűségi változók átlagát vesszük, akkor a számtani közepek a várható értékhez tartanak. (A koronavírus viszont egy olyan katasztrófa, amelyre nem alkalmazható a valószínűség-számítás.)

A valószínűség-számítás egyik legfontosabb közgazdasági alkalmazása a biztosítás, amely nagy számú, összességében kicsiny és független káresemény centralizált kártérítését jelenti. A klasszikus (hagyományos) biztosítás mellett fontos morális kockázatot és kontraszelekciót is modellezzük: az előbbiben a biztosított hanyagabban védi a biztosított tárgyat, az utóbbiban a rossz kockázatok a biztosítotti körben túlsúlyba kerülnek.

Eljutottunk a *matematikai statisztikához* is, amely kiegészíti, szinte megfordítja a valószínűség-számítást. Itt a bonyolultabb valószínűségek ismeretéből következtetünk vissza az egyszerűbbekére. Vezető példánk a testtömeg lineáris függése a magasságtól: ez a regressziószámítás. Egyik közgazdasági alkalmazásunk: minél fejlettebb egy ország, statisztikusan annál magasabb az árszintje.

• **Heterogenitás.** Míg a fizika meglehetősen homogén rendszerekkel foglalkozik, addig a közgazdaságtanban a heterogenitás az uralkodó. Például amikor Newton 1680 körül a Föld Nap körüli keringését vizsgálta, homogén gömbnek vette a hatalmas Napot és a nála kb. 100-szor kisebb átmérőjű Földet, és belátta, hogy a tömegvonzás úgy hat, mintha mindkét égitest kiterjedés nélküli lenne.

Amikor makromodellekkel dolgoznak, a közgazdászok is gyakran homogenizálják a gazdaságot. Felteszik, hogy van egy reprezentatív fogyasztó, akinek a fogyasztását megsokszorozva, megkapjuk az egész gazdaság fogyasztását. Bizonyos esetekben, például amikor a beruházási ciklusokat akarjuk megmagyarázni, jó szolgálatot tesz ez a megkozelítés. Gyakran azonban durva tévedéseket okoz. Az előző alfejezetben már taglaltuk, hogy pl. feleslegesnek mutatja az anticiklikus politikát, azon belül is a jövedelem-újraelosztást. Most újabb példákat hozunk, amikor a heterogenitást figyelembe kell venni.

A jövedelemeloszlás és adóbevallás elemzésében az adó eleve azt a célt szolgálja, hogy csökkentse a kiinduló jövedelemegyenlőtlenségeket. Nem meglepő, hogy minél kisebb a mediánjövedelem az átlaghoz képest, annál nagyobb adókulcsot érdemes kiróni az állampolgárokra, Az viszont meglepő lehet, hogy a legkisebb jövedelmű csoport jólétét maximalizáló kormányzatnak az adómorál gyengülésekor nem nagyobb, hanem kisebb adókulcsot kell kiróni.

• **Kölcsönhatások.** Amikor Newton 1680 körül megalkotta a Naprendszer dinamikai modelljét, jó közelítéssel egymástól függetlenül vizsgálhatta az egyes bolygók Nap körüli keringését. Így igazolta, hogy első közelítésben a tömegvonzás hatására a Föld egy olyan ellipszispályán mozog, amelynek egyik gyújtópontjában a Nap áll. Majd a Hold hatását bekapcsolva megmagyarázta a földi árapály jelenségét. De még a Naprendszer mozgásának teljes magyarázatában sem hanyagolhatók el a kölcsönhatások. A korábbi számítások hibáit 1846-ban Leverrier úgy küszöbölte ki, hogy feltételezte egy új bolygó, a Neptun létezését, és helyesen megjósolta helyzetét egy adott időpontban. Majd a 20. században Kolmogorov, Arnold és Moser együtt igazolta, hogy nagy valószínűséggel a Neprendszer évmilliárdokig együtt marad.

A gazdasági élet egyik jellemzője, hogy a részek viselkedésének eredője gyakran más, mint az egészé. Például az 1929-ben a kezdődő Nagy Válság idején az egyes országok kormányzatai költségvetési megszorításokkal próbáltak úrrá lenni a nehézségeken. Nem vették figyelembe, hogyha csökkentik a béreket, és tömegesen bocsátják el a közalkalmazottakat, akkor csődbe mennek a fogyasztási cikkeket előállító gyárak és az árukat értékesítő boltok. Rövidlátóan emelték a vámokat, leértékelték saját valutájukat, hogy segítsék a hazai ipart és mezőgazdaságot. Szem elől tévesztették, hogy a többi ország is hasonlóan cselekszik, és csak egy ördögi kör indul be: a nemzetközi kereskedelem összezsugorodását követi a hazai termelés zuhanása.

A részletes kifejtés előtt azonban a koronavírus-járvány példáján szemléltetjük a modellek alkalmazását.

A koronavírus-járvány

A 2020. elején kitörő koronavírus-járvány jó alkalmat nyújt arra, hogy a fenti gondolatokat – némileg más sorrendben – ezen a területen is szemléltessük. A részleteket a 21. fejezetben mutatjuk be.

• Dinamika. Minden járvány dinamikus folyamat, hiszen kitörése előtt mindenki fertőzhető, de nem fertőzött volt, majd a fertőzés terjedésével a népesség egyre nagyobb hányada vált fertőzötté, később gyógyulttá/halottá. A folyamat diszkrét időben (pl. napi szinten) is leírható. A folyamat nem lineáris, mert az új fertőzések száma egyaránt arányos a fertőzhetők és a fertőzöttek számával.

• Állami teendők. A járvány elleni küzdelem tipikus állami közegészségügyi feladat. Ellentétben a piaci tranzakciókkal, a járvány elleni védekezést nem lehet csak az egyénekre hagyni: ha valaki saját könnyelműsége miatt elkapja a koronavírust, akkor nemcsak magát, hanem másokat is veszélyeztet, hiszen megfertőzheti azokat is. Az államnak kell eldöntenie, hogy mikor és milyen mértékű vesztegzárat alkalmaz, és tartat be. (Persze, az államnak vigyáznia kell, hogy ne akarjon olyan dolgokba is beleszólni, amely nem tartozik rá.) A hatóságok zárlattal képesek lassítani a járvány terjedését, ellaposítva a járványgörbét, biztosítják az egészségügyi kapacitások elégségességét, sőt, időt nyerhetnek a vakcina feltalálására,

De jelentős feladat hárul az államra a koronavírus okozta gazdasági károk elhárításában is. Mennyire mentesíti a munkájukat elvesztőket a túlélésben, illetve milyen támogatást ad a vállalatoknak, hogy az elégtelen kereslet és az akadozó alkatrész-ellátás miatt csökkenő kínálat mellett veszteségeiket elviselhessék, és minél több dolgozójukat tarthassák meg a válság utánra?

• Optimalizálás. Az egyének a saját jól felfogott érdekükben betartják a járványügyi előírásokat. De mindig marad valamennyi mozgásterük, hogy eldöntsék: mennyit mozognak, mennyit dolgoznak, milyen kockázatokat vállalnak? A vállalatok is optimalizálnak: milyen dolgozókat tartanak meg, hogyan módosíthatják kínálatukat? És az állam is optimalizál: milyen mértékű költségvetési hiányt vállal a túlélés érdekében, anélkül, hogy túlzott terheket rakna a jövő nemzedékre?

• Heterogenitás. A hagyományos járványmodellek csak minimális mértékben vesznek tudomást a járvány heterogenitásáról: mindenkit a három rekesz egyikébe tesz bele: fertőzhetők, fertőzöttek, és gyógyultak. A valóságban azonban e csoportok heterogének: tagjaik nem egyformán fertőzhetők, nem egyformán fertőznek és nem egyformán gyógyulnak. Például a koronavírus elsősorban az időseket, különösen a kórházban és idősotthonokban tartózkodókat fenyegeti.

• Véletlen hatások. A koronavírusnál (de pl. a szexuális betegségeknél is) léteznek szuperfertőzők. Konkrét modellezésnél gyakran valószínűség-számítási módszerrel becsülik meg egy heterogén népesség fertőzőképességi eloszlását. A járvány elleni küzdelem hatékonyságát jelentősen növeli, ha sikerül a szuperfertőzőkre koncentrálni az elhárítást.

• Kölcsönhatások. A koronavírus-járvány terjedésére minden országban erősen hatott, hogy mennyire tartotta be a lakosság a járványügyi előírásokat. A világjárvány első heteiben az emberek mindenütt meglehetősen könnyelműen vették a fertőzési veszélyt: Kína messze van stb.. Aztán az egész világ láthatta, hogyan pusztít a járvány az Európában elsőnek érintett Észak-Olaszországban és Spanyolországban. A szerencsésebb országok állampolgárai más kárán tanulhattak, és jelentős részben ennek tudható be, hogy Kelet-Közép-Európában sokkal enyhébb volt a járvány, legalábbis 2020. júniusáig.

Statisztikusan a lakosság egészségi állapota (például a születéskor várható élettartam vagy az egészségesen leélt évek száma) együtt emelkedik az egy főre jutó egészségügyi szolgáltatásokkal, ez utóbbi viszont párhuzamosan növekszik a gazdaság teljesítményével. Tehát ha járvány elleni döntések miatt a gazdasági teljesítmény 10%-kal visszaesik, akkor az egészségügyi kiadások is 10%-kal visszaeshetnek. Kérdés, hogy képes-e a kormány az egészségügyi kiadások állami részét úgy elosztani, hogy az ne rontsa túlzott mértékben a lakosság egészségügyi állapotát. Az sem magától értetődő, hogy valság idején a szegényebbeknek marad-e elég pénzük a legszükségesebb fogyasztás mellett a gyógyszerek kiváltására.

A könyv lehetséges feldolgozásai

Bár a fejezetek jelentős részben függetlenek egymástól, talán nem felesleges leírni néhány lehetséges feldolgozást.

- Hagyományos statikus anyag – (al)fejezetek: 2.3, 3, 5, 6, 8, 14
- Dinamika – fejezetek: 2, 4, 7, 9, 12, 15, 20
- Nyugdíj – fejezetek: 9, 10, 11, 12
- Véletlen jelenségek – (al)fejezetek: 2.1, 3, 16–19

Végül az 1.1. táblázatban a könyv legfontosabb modelljeit három tulajdonság szerint soroljuk be: *1)* optimalizáló vagy nem, *2)* statikus vagy dinamikus, *3)* homogén vagy heterogén szereplők.

1.1. táblázat. Fontosabb modellek és főbb tulajdonságaik

Modell	Optimalizál	Dinamikus	Heterogén
Növekedéselmélet	−	+	−
Sertésciklus	−	+	−
Államadósság	−	+	−
Játékelmélet	+	±	+
Beruházási ciklusok	−	+	−
Fogyasztás	±	±	−
Termelés	+	−	±
Adómorál	±	−	+
Népességdinamika	−	+	+
Elemi nyugdíjmodellek	−	±	±
Önkéntes nyugdíj	+	−	+
Nyugdíjdinamika	−	+	+
Jelzáloghitel	−	+	−
Általános egyensúly	+	−	+
Együtt élő nemzedékek	+	+	+
Biztosítás	+	−	+
Szerencsejáték	+	−	+
Regressziószámítás	+	x	+
Berkson-paradoxon	+	−	+
Járványmodell	−	+	−

Reméljük, sikerült felkelteni az Olvasó érdeklődését a közgazdasági modellek iránt. Bevezetésünk végére értünk, jöhetnek a részletek.

2. Egyszerű lineáris dinamika

A 2.1. alfejezetben bemutatjuk a középiskolából ismert számtani és mértani sorozat „gyártási szabályának” közös általánosítását, az állandó együtthatós elsőrendű lineáris differenciaegyenletet, ahol az új állapot az előző állapot lineáris függvénye. Ennek a rendszernek is van zárt alakú megoldása, azaz a t-edik állapot t és egyéb paraméterek függvényében közvetlenül meghatározható. A matematikai eredményeket a következő három közgazdasági modellre alkalmazzuk.

A 2.2. alfejezet klasszikus (hagyományos) növekedési modelljében a beruházás a termelés adott hányada, a termelés az előző év végi tőkével arányos és a tőkenövekmény a beruházással egyenlő.

A 2.3. alfejezet piaci árigazodási modelljében minden lépésben az ár arányosan növekszik a túlkereslettel (vagy csökken a túlkínálattal). Korunkban például a legfontosabb termékpár a kőolaj és a földgáz. A nemzetközi piacon harc folyik a különböző olaj- és gáztermelő országok között (lásd 3.1. alfejezet), és ennek hatása alatt bonyolult módon reagál a piac a kereslet és a kínálat különbségére. A magyar fogyasztó minden nap láthatja a benzinárak változását, de az árat módosítja az egyes benzinkutak földrajzi helyzete és a kormány adópolitikája.

A 2.4. alfejezet államadóssági modelljében az adó- és járulékbevételek általában (de nem mindig) elmaradnak a kiadásoktól (amelynek jelentős része lehet az adósság után fizetendő kamat). Az így keletkező költségvetési hiány évről évre emeli az államadósságot, de a GDP-hez viszonyított értéke akkor is csökkenhet, ha hiány van.

2.1. Elsőrendű lineáris differenciaegyenletek

Több fejezetben szükségünk lesz néhány dinamikai fogalomra és tételre. A hétköznapi időfogalom folytonos: az év napokra, a napok órákra stb. oszlanak. A közgazdaságtanban inkább a *diszkrét* (szakaszos) megközelítés gyümölcsöző: havonta fizetik a bért, évente takarítják be a termést, fogadják el a költségvetést, negyedszázadonként cserélődnek a nemzedékek. Technikailag is egyszerűbb a diszkrét idő alkalmazása. (Bonyolultabb esetekben az időszakok hossza véletlen, de ezt a könyvben figyelmen kívül hagyjuk.)

Dinamikus rendszerről beszélünk, ha a rendszer korábbi időszakbeli állapotai befolyásolják a jelen időszak *állapotát.* Például mechanikai dinamikus rendszer a kerékpár, amelyet a kerékpáros a pedál taposásával, a kormány forgatásával és fékezéssel irányít, s így egyik helyről (állapotból) a másikba (állapotba) jut el. Dinamikus gazdasági rendszerre példa az idealizált folyószámla: állapota az egyén bankegyenlegének hó végi értéke az egy hónappal korábbi számlaegyenleg + kamat + a havi befizetések – kifizetések.

A dinamikus rendszer *egyensúlyi helyzetben* van, ha az állapot onnan nem mozdul ki. A mérleghinta vízszintesen egyensúlyban van, ha két végpontján egy-egy azonos tömegű egyén ül. 2019. januárjában a 320-as forint–euró-árfolyam pillanatnyilag egyensúlyinak volt nevezhető, mert ezen az áron az eladók kínálata és a vevők kereslete egyenlő volt, azóta már 340–360 körül mozog az árfolyam.

Stabil (pontosabban: aszimptotikusan stabil) az egyensúlyi helyzet, ha kisebb kilengés után a rendszer állapota visszatér az egyensúly közelébe. A súrlódásmentes mérleghinta instabil. A 2004–2008. évek 240 forint körüli euró-árfolyama instabilnak bizonyult, mert 2008 szeptembere óta kimozdult onnan, és azóta sem tért vissza a közelébe.

Homogén lineárisnak (egyenes arányosságnak) nevezünk minden f skalár–skalár függvényt, ha minden (x,y) és (α,β) valós számpárra igaz a következő azonosság:

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

Belátható, hogy ezt a számegyenesen egyetlen folytonos függvénysereg elégíti ki: $f(x)=Ax$. *Inhomogén lineáris* esetben a felbontás csak $\alpha+\beta=1$-re áll. Képletben: $f(x)=Ax+B$. Mértanilag: bármely két függvénypont között húzott egyenes maga a függvény, és homogén esetben az egyenes átmegy az origón.

Köznapi példák: amikor x kg almát vásárolunk, és 1 kg alma ára p Ft, akkor a teljes vételár px: homogén linearitás. Persze, sok esetben szerepel egy állandó, például a valutaváltásnál a bank egy fix összeget hozzáadhat a fizetendő összeghez. Ha a Fahrenheit-skálán megadott hőmérsékletet számítjuk át Celsiusra, akkor a $C=aF+b$ képletet alkalmazzuk, ahol $a=1/1{,}8=0{,}555\ldots$ és $b=-32/1{,}8=-1{,}777\ldots$. Tudjuk, hogy mennyivel nehezebb a hőmérséklet-átváltás, mint az almavétel költségszámítása.

Lineáris függvényekkel nagyon egyszerű számolni, de gyakran találkozunk nemlineáris függvényekkel is. Például a szabad esés út–idő képlete négyzetes, ezért 2 másodperc alatt nem kétszer-, hanem négyszerannyi utat tesz meg a szabadon eső test, mint 1 másodperc alatt. Ehhez hasonlóan, nem lineáris a kiadás—mennyiség-függvény árukapcsolásnál, mert egyet fizet, kettőt kap.

Rátérünk a formális kifejtésre. Legyen $t=0,1,2,\ldots,$ a megfelelő időszak (nap, hét, hónap, év) indexe. A legegyszerűbb diszkrét (nem folytonos) idejű lineáris dinamikus rendszer alakja

$$x_{t+1}=Ax_t+B,\qquad t=0,1,2,\ldots, \tag{2.1}$$

ahol x_0 kezdeti állapot és A, B együttható adott. Ez speciális esetként egyaránt tartalmazza a számtani sorozatot ($A=1$) és a mértani sorozatot ($B=0$).

2.1. példa. A számtani sorozat definícióját a mi jelölésünkben írjuk föl: $x_{t+1}=x_t+B$, ennek explicit alakja: $x_t=x_0+Bt$.

A mértani sorozat definícióját is új jelölésben írjuk föl: $x_{t+1}=Ax_t$, ennek explicit alakja: $x_t=A^t x_0$.

A továbbiakban $A\neq 1$. A rendszer *egyensúlyi helyzete vagy állandósult állapota vagy fix pontja* x^{o}, amelyből indítva a rendszert, az állapot helyben marad:

$$x^{\mathrm{o}}=Ax^{\mathrm{o}}+B. \tag{2.1$^{\mathrm{o}}$}$$

Figyelem: a fix pontban felső indexben álló o szerepel, míg a kezdő állapotban 0 az alsó index.

A továbbiakban keressük az általános (2.1) rendszer explicit megoldását, azaz x_t-t A,B,t függvényeként. Ez segít távoli időszakok állapotának előrejelzésében, illetve a stabilitás vizsgálatában.

Először csak két további időszakra írjuk föl az egyenletet:

$$x_2=Ax_1+B=A^2x_0+(A+1)B,\qquad x_3=Ax_2+B=A^3x_0+(A^2+A+1)B.$$

Ez alapján megfogalmazhatjuk az indukciós feltevést (a mértani sor összegképletével)

$$x_t = A^t x_0 + (A^{t-1} + \cdots + A^2 + A + 1)B = A^t x_0 + \frac{A^t - 1}{A - 1}B. \tag{2.2}$$

(2.2)-t behelyettesítve (2.1)-be és rendezve, igazolódik az indukciós feltevés:

$$x_{t+1} = A\{A^t x_0 + [A^{t-1} + \cdots + A^2 + A + 1]B\} + B = A^{t+1}x_0 + \frac{A^{t+1} - 1}{A - 1}B.$$

Érdemes egy általánosabban alkalmazható megoldást is bemutatni, amely az egyensúlyi állapotba helyezi az új koordinátarendszer központját.

2.1. tétel. *A (2.1) lineáris rendszer egyensúlyi helyzete (állandósult állapota)*

$$x^{\mathrm{o}} = \frac{B}{1 - A}, \tag{2.3}$$

és (2.1) explicit megoldása

$$x_t = x^{\mathrm{o}} + A^t(x_0 - x^{\mathrm{o}}), \qquad t = 1, 2, \ldots. \tag{2.4}$$

Következmény. *A (2.3) egyensúly akkor és csak akkor stabil, illetve aszimptotikusan stabil, ha $-1 \le A < 1$, illetve $-1 < A < 1$.*

Megjegyzés. Lineáris rendszer esetén csak hajszálnyi különbség van a stabil és az aszimptotikusan stabil rendszer között: a korábban kizárt $A = 1$-hez tartozó rendszeren túl az $(x_1, x_2, x_1, x_2, \ldots)$ 2-ciklust adó $A = -1$ paraméterű rendszer stabil, de nem aszimptotikusan stabil.

Bizonyítás. (2.3) adódik (2.1°)-ból.

Kivonva a (2.1) rendszeregyenletből a (2.1°) egyensúlyi egyenletet, kiesik az állandó tag, és egy mértani sorozathoz jutunk:

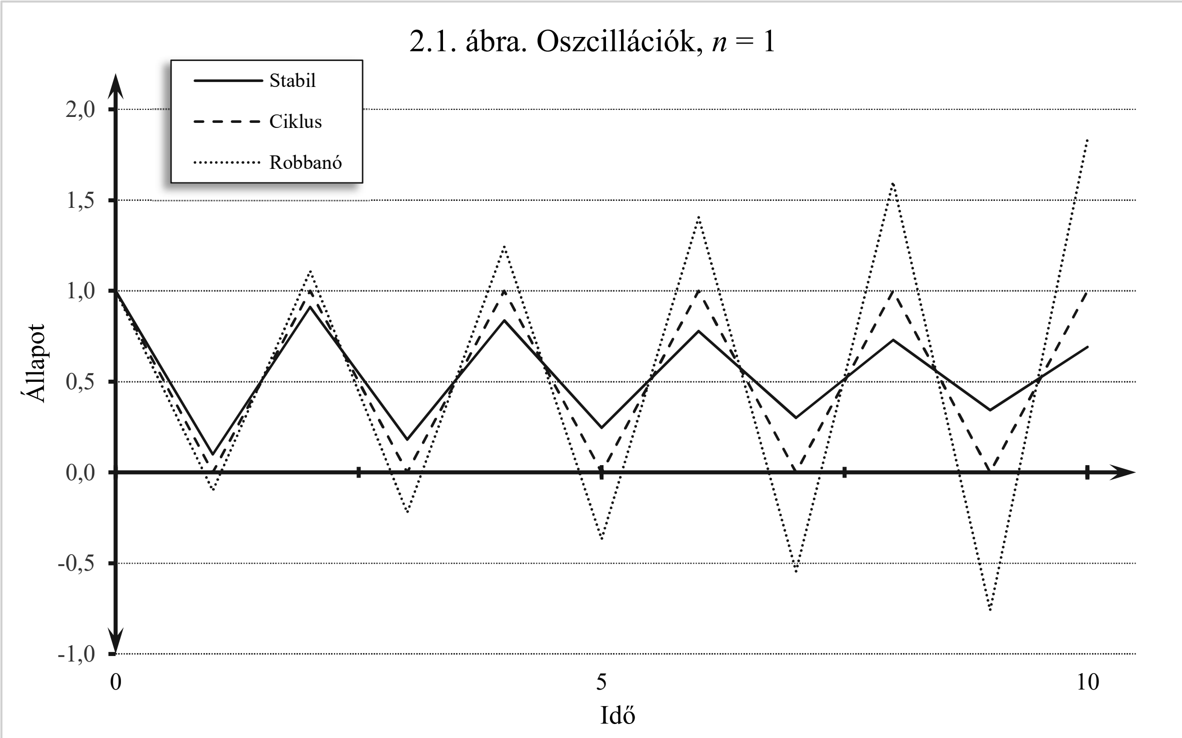
$$x_{t+1} - x^{\mathrm{o}} = A(x_t - x^{\mathrm{o}}).$$

Matematikailag ez egy alapvető fogás: új változó bevezetésével az inhomogén egyenletet visszavezettük az egyszerűbb homogén egyenletre: $B = 0$. Innen már adódik a (2.4) explicit képlet és a kétféle stabilitási feltétel. □

2.1. feladat. (2.2) és (2.4) összehasonlításával igazoljuk a mértani sor összegképletét:

$$S_t = 1 + A + \cdots + A^{t-1} = \frac{A^t - 1}{A - 1}, \qquad A \ne 1.$$

A 2.1. ábra a következő adatokra mutatja be a dinamikát: $B = 1$, $A = -0{,}9; -1; -1{,}2$: oszcilláló, de stabil, ciklikus és robbanó.



Természetesnek tűnik a

2.2. tétel. *Ha a (2.1) lineáris rendszer (x_t) pályái korlátosak, akkor két közeli kezdeti állapotból induló pálya az idők végezetéig közel marad egymáshoz.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy y_0-ból induló pályát, amelynek zárt alakú megoldása

$$y_t = x^{\mathrm{o}} + A^t(y_0 - x^{\mathrm{o}}), \qquad t = 1, 2, \ldots. \tag{2.4$'$}$$

Kivonva a két megoldást egymásból: $y_t - x_t = A^t(y_0 - x_0)$. Korlátosság miatt $|A| \leq 1$, azaz $|y_t - x_t| \leq |y_0 - x_0|$. □

Megjegyzések. 1. A 7. fejezetben látni fogjuk, hogy ez a természetesnek tűnő tulajdonság korlátos nemlineáris rendszerre gyakran nem érvényes, ilyenkor kaotikus dinamikáról beszélünk. Vagyis tömérdek olyan kezdőállapot létezik, amelyeknél akármilyen kis megfigyelési hiba meghiúsítja a hosszú távú előrejelzést.

2. A 12.3. alfejezetben a paraméterérték időben változik, ezért ott az itt előadott elmélet nem alkalmazható.

2.2. A klasszikus növekedési modell

Mindenekelőtt röviden el kell magyaráznunk a GDP (gross domestic product, bruttó *hazai* termék) fogalmát. Első közelítésben egy ország évente előállított termék- és szolgáltatástömegét méri, levonva belőle a termelőfelhasználást. Például az autógyárból kigördülő autó értékéből le kell vonnunk a beszállítók által gyártott alkatrészek értékét, mert azt már a beszállítók kibocsátásánál figyelembe vettük, ... és így tovább. Nettó fogalomról van szó, leszámítva azt, hogy a tőke értékcsökkenését nem vonjuk le belőle, erre utal a gross jelző. A hazai jelző arra utal, hogy nem fontos, hogy a kibocsátó egység melyik nemzet tulajdonában van; az a lényeg, hogy itthon gyártják. (Például Írországban a kibocsátás jelentős részét külföldi tulajdonú vállalatok állítják elő, és jövedelemkivonás miatt az ún. bruttó *nemzeti* termék jóval kisebb.) A modern gazdaságban az egy főre jutó kibocsátás – kisebb-nagyobb visszaeséseket leszámítva – folyamatosan nő.

Az IMF (2018) augusztusi jelentése alapján a 2.1. táblázat magyar makroadatokat közöl a 2018 előttről (tény) és 2018-tól (előrejelzés), a modellben szereplő változókról. Már 2019. novemberében ismert volt, hogy az IMF nagyon alábecsülte a 2018–2019 GDP növekedést, amely a valóságban 5% körül volt, a kiugró 30%-os beruházási hányad miatt. (A többi mutató jelentését csak később adjuk meg.)

2.1. táblázat. Válogatott magyar makroadatok, a GDP százalékában

Évek Mutatók	2013	2014	2015	2016	2017	2018*	2019*
GDP növekedési ütem	2,1	4,2	3,4	2,2	4,0	4,0	3,3
Beruházás	20,9	22,2	21,9	19,2	21,5	23,1	23,3
Költségvetési egyenleg	–2,6	–2,6	–1,9	–1,7	–2,0	–2,4	–2,0
Elsődleges egyenleg	1,6	1,2	1,5	1,5	0,8	0,1	0,2
Államadósság	77,1	76,6	76,7	76,0	73,6	71,3	69,1
Fizetési mérleg	3,8	1,5	3,5	6,0	3,1	2,3	2,1
Bruttó külső adósság	117,8	114,7	107,7	97,2	84,6	76,2	70,7

Megjegyzés: * előrejelzés

Ebben az alfejezetben Harrod–Domar (1939/1945) klasszikus növekedési modelljét mutatjuk be. Legyen rendre Y_t, I_t és K_t a t-edik év kibocsátása, beruházása és tőkeállománya (ez utóbbi az év végén). Definíció szerint teljesülnek a következő azonosságok:

Kibocsátás–tőke

$$Y_t = AK_{t-1}, \qquad t = 1, 2, \ldots, \tag{2.5}$$

ahol A, a kibocsátás–tőke-hányados feltevés szerint állandó.

Beruházási egyenlet

$$I_t = sY_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, \tag{2.6}$$

ahol s a beruházási hányados, $0 < s < 1$.

Tőkenövekedési egyenlet

$$K_t = K_{t-1} + I_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, \tag{2.7}$$

A három egyenletből egyszerűen levezethető a növekedés.

2.3. tétel. *A klasszikus növekedési modellben a GDP egyenletes ütemben nő:*

$$Y_t = GY_{t-1}, \qquad t = 1, 2, \ldots, \tag{2.8}$$

ahol $G > 1$ az időben állandó növekedési együttható, a növekedési ütem $g = G - 1 = sA$.

Bizonyítás. Helyettesítsük be (2.7)-be (2.6)-ot, majd (2.5)-öt:

$$K_t = K_{t-1} + sY_t = K_{t-1} + sAK_{t-1} = (1 + sA)K_{t-1}, \tag{2.9}$$

(2.5 és (2.6) értelmében Y_t és I_t is párhuzamosan nő. □

Számpélda: $s = 0{,}2$ és $A = 0{,}3$ esetén $G = 1{,}06$.

Ez a modell függetlennek tekinti a beruházási hányadost és a kibocsátás–tőke arányt, és kizárja a tőke–munka helyettesítést (a 6. fejezetbeli Solow-modell feloldja e megszorításokat). Ezért csak nagyon korlátozottan alkalmazható. A következő feladat egy harmadik dimenzióban, a beruházások megvalósítási idejében általánosítja a modellt.

Bemutatunk egy *paradoxont*, amely azt mutatja meg, hogy egy tartósan gyorsabban növekvő gazdaság akkor is utoléri a lassabbat (hullámmal jelölve), ha kezdetben az aritmetikai távolság nő (vagy stagnál) közöttük.

Számpélda. Három huszonötéves időszakot mérlegelve legyen a két ország egy főre jutó GDP-szintje rendre 1:3:9 és 2:4:8. Az aritmetikai különbség 1:1:–1.

Általánosabban, ha $y_t = y_0 G^t$ és $\tilde{y}_t = \tilde{y}_0 \tilde{G}^t$, $y_0 < \tilde{y}_0$ és $G > \tilde{G}$, akkor van olyan $T > 0$ egész, amelyre $y_t > \tilde{y}_t$ $(t > T)$, még ha $y_1 - \tilde{y}_1 \leq y_0 - \tilde{y}_0$ vagy ekvivalens megfogalmazásban $y_1 - y_0 \leq \tilde{y}_1 - \tilde{y}_0$. Behelyettesítjük a bizonyítandó egyenlőtlenségbe a növekedési képletet:

$$y_0 G^t > \tilde{y}_0 \tilde{G}^t.$$

Logaritmizálva (az alap közömbös):

$$\log y_0 + t \log G > \log \tilde{y}_0 + t \log \tilde{G},$$

majd rendezve az egyenlőtlenséget:

$$t > T = \frac{\log \tilde{y}_0 - \log y_0}{\log G - \log \tilde{G}} > 0.$$

y kezdeti növekedése aritmetikai értelemben akkor kisebb, mint $\tilde{y}$-é, ha $(G-1)y_0 < (\tilde{G}-1)\tilde{y}_0$, azaz

$$1 < G < 1 + \frac{y_0}{\tilde{y}_0}(\tilde{G} - 1).$$

Az igazi kérdés nem is ez, hanem hogy a felzárkózó gazdaság tudja-e tartani az egy főre jutó nagyobb növekedési ütemét vagy sem. A történelem folyamán az USA képes volt megelőzni Nagy-Britanniát, de Japán például beragadt az USA alatti fejlettségi szinten, Kína jövője még ismeretlen.

A 2.2. táblázat a legutóbbi évtized egy főre jutó relatív növekedési pályáját adja meg néhány EU-tagországra (a mindenkori EU fejlettség = 100). Bonyolult statisztikai módszerekkel a vásárlóerőben mutatkozó különbségeket kiküszöbölik. Figyelemre méltó, hogy Olaszország, de különösen Görögország relatív teljesítménye milyen gyorsan romlik, miközben Lengyelország és Románia milyen gyorsan emelkedik.

2.2. táblázat. Néhány EU-tagország relatív GDP-idősora 2010–2018

	Relatív GDP idősor				
Ország	2010	2012	2014	2016	2018
Németország	119	123	125	123	122
Egyesült Királyság	109	109	110	108	105
Olaszország	105	102	96	97	96
Görögország	84	72	71	68	68
Csehország	83	82	86	87	91
Magyarország	65	66	68	68	71
Lengyelország	62	67	67	68	70
Románia	51	54	55	59	65

Megjegyzés. Helytakarékosságból csak a páros éveket tüntetjük föl. Megemlítjük, hogy 2009-ben Görögország még 94-en állt.

Kitérő: *piaci árfolyamon* a wikipédia Németországra $\tilde{Y}_1 = 3863$ mrd dolláros GDP-t, Magyarországnak pedig $\tilde{Y}_2 = 170{,}4$ mrd dolláros GDP-t ad meg. Ha elosztjuk e mutatókat $N_1 = 83$ millióval és $N_2 = 9{,}77$ millióval, akkor az egy főre jutó mutató $\tilde{y}_1 = 46\,542\$$ és $\tilde{y}_2 = 17\,441\$$. A német és a magyar mutató aránya $46\,542/17\,441 = 2{,}67$; félrevezetően nagyobb, mint a 2.2. táblázatból adódó $122/71 = 1{,}72$ hányados.

Ha már az Egyesült Királyság szóba került, érdemes röviden megvizsgálni: hogyan hat az EU átlagos fejlettségére, és ennek fényében az egyes tagországok relatív fejlettségére a szigetország kiválása? Ha nemcsak a kérdést akarjuk megválaszolni, de magát a súlyozott átlagot is definiáljuk, akkor szükség lesz a következő jelölésekre: $J = 28$ a tagországok kiválás előtti száma, $j = 1, 2, \ldots, J$ az egyes tagoszágok indexe, y_{jt} a j-edik tagország egy főre jutó (egyelőre nem relatív, de összehasonlítható) fejlettsége a t-edik évben, N_{jt} a j-edik tagország létszáma a t-edik évben, és $N_t = \sum_{j=1}^{J} N_{jt} = N_{1t}+N_{2t}+\cdots+N_{J-1,t}+N_{Jt}$ az eredeti összlétszám.

Az EU-J átlagos fejlettsége definíció szerint

$$y_t = \frac{\sum_{j=1}^{J} N_{jt} y_{jt}}{N_t}.$$

A J-edik tagország kiválása után a bentmaradók átlagos fejlettsége

$$y'_t = \frac{\sum_{j=1}^{J} N_{jt} y_{jt} - N_{Jt} y_{Jt}}{N_t - N_{Jt}}.$$

Szükségünk lesz még a kilépő ország és a bentmaradó tagországok t-edik évi létszámarányára:

$$\nu_t = \frac{N_{Jt}}{N_t}.$$

A két fejlettségi szint közti kapcsolat levezetéséhez helyettesítsük be az

$$N_t y_t = \sum_{j=1}^{J} N_{jt} y_{jt}, \qquad N_{Jt} = \nu_t N_t$$

egyenlőségpárt y'_t-be:

$$y'_t = \frac{N_t y_t - N_{Jt} y_{Jt}}{N_t - N_{Jt}} = \frac{y_t - \nu_t y_{Jt}}{1 - \nu_t}.$$

2018-ban $y_t = 1$ és $y_{Jt} = 1{,}05$ volt, $\nu_t = 66{,}4/512{,}4 = 0{,}129$; tehát

$$y'_t = \frac{1 - 0{,}129 \times 1{,}05}{1 - 0{,}129} = \frac{0{,}865}{0{,}871} = 0{,}993.$$

A j-edik tagország relatív fejlettsége a szűkebb bázisban a következő:

$$y'_{jt} = \frac{y_t}{y'_t} y_{jt} = 1{,}007 y_{jt},$$

azaz a bent maradó 27 ország relatív fejlettsége 0,7%-kal „emelkedik”.

2.3. A piaci árigazodás modelljei

Ebben az alfejezetben a piaci árigazodás különféle modelljeit mutatjuk be. Az áruk és szolgáltatások *piaci elosztásáról beszélünk,* ha a vevők és az eladók szabadon döntenek a cserélt javak mennyiségéről és áráról. Magunk mögött tudva a feudalizmust és a szocializmust, ma a világon a javak döntő részét a piacon osztják el. A kötelező egészségügyi és nyugdíjbiztosítás vagy a közoktatás azonban jelentős kivétel, sőt a dohány- és alkoholtermékek piaca is. 1947 és 1990 között hazánkban és más szomszédos országokban a piaci elosztást a fentiekhez képest jelentősen korlátozták: a lakossági szektorban a lakások jelentős részét kiutalták, telefonvonalra évtizedekig kellett várni, dollárt forintért – minimális kivételtől eltekintve – csak a feketepiacon lehetett vásárolni. A vállalati szektorban még gyengébben érvényesült a piaci mechanizmus.

Bemutatandó modellünkben olyan termékpiacot vizsgálunk, amelyen nagyszámú eladó kínál terméket, és nagyszámú vevő keresi ugyanazt a terméket. A piacon egységes ár uralkodik (P), és a bevétel, illetve a kiadás az ár és a mennyiség szorzata.

Feltesszük, hogy a kínálat és a kereslet az ár növekvő, illetve csökkenő függvénye, egyelőre időtlenül:

$$S(P) = a + bP \qquad \text{és} \qquad D(p) = c - dP, \qquad a, b, c, d > 0. \tag{2.10}$$

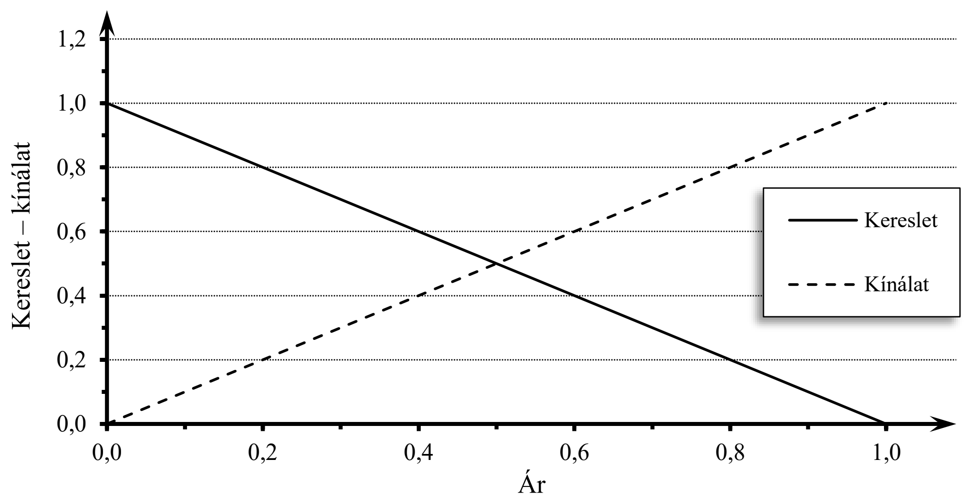
(Az 5. és a 6. fejezetben részletesebben foglalkozunk a keresleti és a kínálati függvényekkel.) Egyensúly esetén a kereslet és a kínálat megegyezik: $D(P) = S(P)$, azaz az *egyensúlyi ár*

$$P^{\mathrm{o}} = \frac{c-a}{b+d} > 0, \qquad \text{ha} \qquad c > a. \tag{2.11}$$

A 2.2. ábra szemlélteti a két egyenest és metszését (az ún. Marshall-keresztet, pontosabban annak inverzét, ahogy az a matematikában logikus: $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ és $d = 1$).

$$S(P) = P \qquad \text{és} \qquad D(p) = 1 - P, \qquad P^{\mathrm{o}} = 1/2.$$

2.2. ábra. Inverz Marshall-kereszt



Két változatban dinamizáljuk a statikus modellt.

Piaci árigazodás alapmodellje

Mostantól lemondunk a kereslet és a kínálat azonnali egyensúlyáról, helyette a kínálat és a kereslet az időben változó P_t ár függvényében változik:

$$S_t = S(P_t) = a + bP_t \qquad \text{és} \qquad D_t = D(p_t) = c - dP_t, \qquad P_0 \qquad \text{adott.} \tag{2.12}$$

Egyensúlyi ár változatlanul P^o, de ennek fokozatos elérését a piacra bízzuk. Észszerűnek látszik a következő árszabályozási mechanizmus. Az ár időszakról időszakra növekszik/csökken, ha túlkereslet/túlkínálat van, és az árváltozás arányos ($\kappa > 0$) a túlkereslettel:

$$P_{t+1} = P_t + \kappa(D_t - S_t), \qquad t = 0, 1, \dots, \tag{2.13}$$

a P_0 kezdeti ár adott. Ezt a típusú mechanizmust *negatív visszacsatolásnak* nevezik, mert célszerű reagálással próbálja csökkenteni az egyensúlytól való eltérést. Köznapi példa: ha a szoba hőmérséklete a kívánt érték alá süllyed, akkor önmagától bekapcsol a fűtés; ha a kívánt érték fölé emelkedik a hőmérséklet, akkor pedig kikapcsol a fűtés.

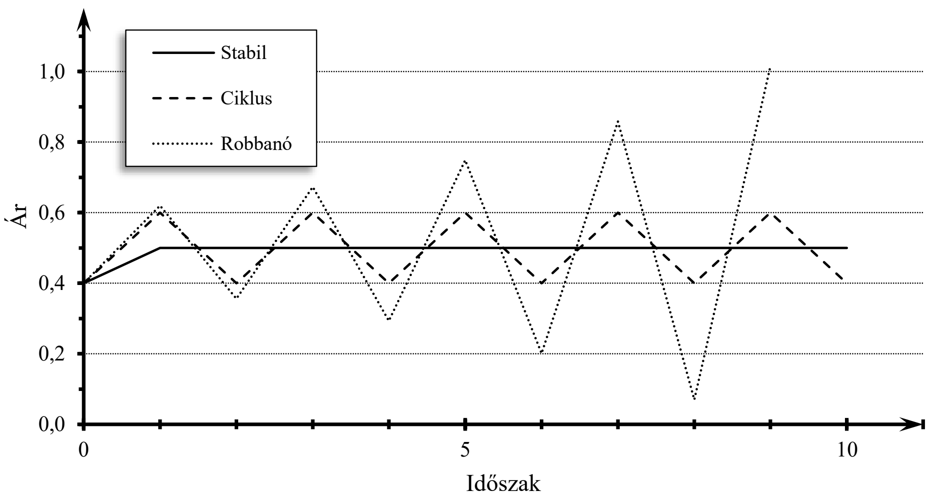
2.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a (2.12)–(2.13)-beli piaci árigazodás (P_t) ársorozata pontosan akkor tart az egyensúlyi árhoz, ha a reakció nem túl erős:

$$0 < \kappa < \bar{\kappa} = \frac{2}{b+d}! \tag{2.14}$$

A túlzott reakció ($\kappa > \bar{\kappa}$) destabilizálja a rendszert.

A 2.2. ábra adataira $\bar{\kappa} = 1$, a 2.3. ábra bemutatja, hogy például $\kappa = 1/2$ stabilizál, $\kappa = 1$ ciklizál és $\kappa = 2$ robbant, végig $P_0 = 0{,}4$ kezdőértékkel.

2.3. ábra. Piaci árigazodás



Természetesen egy ilyen egyszerű esetben felesleges dinamikus számítással (iterációval) közelítőleg kiszámítani az egyensúlyi árat. Ha azonban sok termék van, és az egyes termékek kereslete és kínálata más áraktól is függ, sőt, időben változik, akkor éppen egy ilyen piaci folyamat segíthet a változó piaci egyensúly folyamatos közelítésében.

A sertésciklus modellje

A sertésciklus modellje a sertésárak (és más piaci árak) ciklikus (pontosabban: oszcilláló) ingadozását magyarázza. Kulcsszerepet játszanak benne az ún. *várakozások* (expectations), nevezetesen, hogy a szereplők miképp jelzik előre a jövőt, amikor a jövő függ az előrejelzéstől (vö. 21.1. alfejezet). Alapvetően kétféle várakozást különböztetünk meg: *a)* a *naiv várakozásokat*, amelyek a jelent kivetítik a jövőbe, és a *b)* a *racionális várakozásokat*, amelyek összhangban vannak a tényekkel és a modellel. Modellünk nagyon elemi és divatjamúlt, mert nem a racionális, hanem a naiv várakozásokra épül. Ennek ellenére gyakran reális. Az S_t sertéskínálat egy időszakos késéssel pozitívan ($b > 0$) reagál a P_{t-1} sertésárra: $S_t = a + bP_{t-1}$, míg a D_t sertéskereslet késés nélkül, negatívan reagál ($d > 0$): $D_t = c - dP_t$. A kereslet minden időszakban (gyakorlatban egy évben) egyenlő a kínálattal: $c - dP_t = a + bP_{t-1}$. Rendezve: az idei ár a tavalyi ár csökkenő lineáris függvénye:

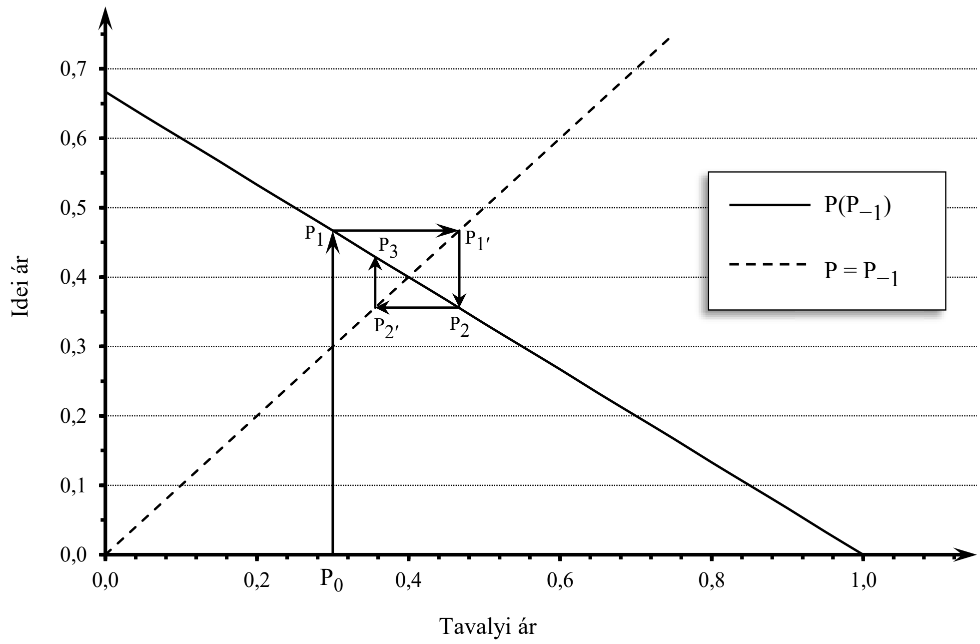
$$P_t = \frac{c - a - bP_{t-1}}{d}, \qquad t = 0, 1, \dots. \tag{2.15}$$

2.4. tétel. *a) A (2.11) feltétel mellett a sertésciklus modelljében létezik pozitív egyensúlyi ár, a fenti P^o. b) Az egyensúlyi ár pontosan akkor aszimptotikusan stabil, ha a kínálati egyenes kevésbé meredeken emelkedik, mint ahogy a keresleti egyenes lejt:*

$$0 < b < d. \tag{2.16}$$

Megjegyzések. 1. Aszimptotikusan stabil esetben, ha a (P_{t-1}, P_t)-fázissíkban felrajzoljuk a dinamikát, a 2.4. ábrán pókhálószerű képet kapunk (*pókhálómodell*). Azért, hogy stabil és gyors alkalmazkodást kapjunk, a 2.2. példa adataiból $d = 1$ helyett $d = 1{,}5$-et választunk, így az egyensúlyi ár $P^o = 0{,}4$. $P_0 = 0{,}3$-ből indítva a rendszert, a függőleges egyenes kimetszi a $P = f(P_{-1})$ egyenesen $P_1 = 0{,}467$-et. Az átlóból egy vízszintes egyenes kimetsz egy pontot, amelyből egy függőleges egyenest indítva a $P = f(P_{-1})$ egyenesből adódik $P_2 = 0{,}356$. Ismétléssel $P_3 = 0{,}430$ stb. gyorsan tart az egyensúlyhoz.

2.4. ábra. Sertésciklus



2. Instabil esetben ($b > d > 0$) a rendszer fölrobban, a lineáris közelítés alkalmatlanná válik, ezért nemlineáris általánosításra lenne szükség.

3. A naiv várakozást általánosítja az *adaptív várakozás*, amelyben a P_t^e előrejelzés és az előző tényérték különbsége arányos az előző eltérés és a nevezett tényérték különbségével:

$$P_t^e - P_{t-1} = \omega(P_{t-1}^e - P_{t-1}), \qquad 0 \leq \omega \leq 1.$$

Az egyik szélső esetben ($\omega = 0$) visszakapjuk a naiv várakozást, a másikban ($\omega = 1$) pedig a statikus várakozást. A kínálati egyenlet $S_t = a + bP_t^e$.

2.2. példa. Könnyű belátni, hogy a $b = d$ esetben a sertésciklus 2-ciklus (vö. a 2.1. tétel, megjegyzés), de ennek előfordulása nagyon valószínűtlen.

2.4. Az államadósság dinamikája

Ebben az alfejezetben az államadóssággal kapcsolatos azonosságokat vezetünk le. Bár tautológiák, mégis hasznosak. A legtöbb országban az állami bevételek és kiadások éves szinten nincsenek egyensúlyban, általában (de nem mindig) az állam többet költ, mint amennyit adóból beszed. Ezért kialakul az államadósság, amely az állam által felhalmozott és még nem törlesztett tartozását mutatja. Legyen a t-edik év végén az *államadósság értéke* D_t és legyen a *költségvetési egyenleg*, azaz az állami bevételek és kiadások különbsége, B_t. Definíció szerint az adósságváltozás az egyenleg ellentettje:

$$D_t = D_{t-1} - B_t. \tag{2.17}$$

A t-edik év kamatlábát r_t-vel jelölve, az egyenleg felbontható az elvileg változtatható E_t *elsődleges egyenleg* és az államadósság utáni fizetendő, változtathatatlan $r_t D_{t-1}$ *kamat* különbségére:

$$B_t = E_t - r_t D_{t-1}. \tag{2.18}$$

Behelyettesítve (2.18)-at (2.17)-be, adódik

$$D_t = (1 + r_t)D_{t-1} - E_t. \tag{2.19}$$

Abszolút számok helyett sokkal értelmesebb relatív számokkal dolgozni, például a magyar költségvetési hiány ezer milliárd forintot is meghaladó értéke helyett azt mondani, hogy a hiány a GDP 2,5%-a. Ezért célszerű bevezetni az $R_t = 1 + r_t$ *kamategyütthatót* és az $Y_t = G_t Y_{t-1}$ GDP-növekedési egyenletet, ahol G_t a növekedési együttható (= 1 + növekedési ütem). Ekkor (2.19) helyett a GDP-arányos adósságdinamikát írhatjuk föl:

$$\frac{D_t}{Y_t} = \frac{R_t D_{t-1}}{G_t Y_{t-1}} - \frac{E_t}{Y_t}. \tag{2.20}$$

Bevezetjük a GDP-arányos államadósságot: az adósságrátát (d_t), a relatív kamategyütthatót (ρ_t) és a GDP-arányos egyenleget (e_t):

$$d_t = \frac{D_t}{Y_t}, \qquad \rho_t = \frac{R_t}{G_t} \qquad \text{és} \qquad e_t = \frac{E_t}{Y_t}. \tag{2.21}$$

Ekkor (2.21) segítségével (2.20) tömörebben felírható:

$$d_t = \rho_t d_{t-1} - e_t. \tag{2.22}$$

Szóban: az idei államadósság-ráta = relatív kamategyüttható × tavalyi államadósság-ráta mínusz a GDP-arányos egyenleg. Igaz a

2.5. tétel. *Állandó $\rho_t = \rho$ relatív kamategyüttható és $e_t = e$ költségvetési egyenleghányados esetén a d_t államadósság-ráta egyensúlyi értéke*

$$d^o = \frac{e}{\rho - 1}, \tag{2.23}$$

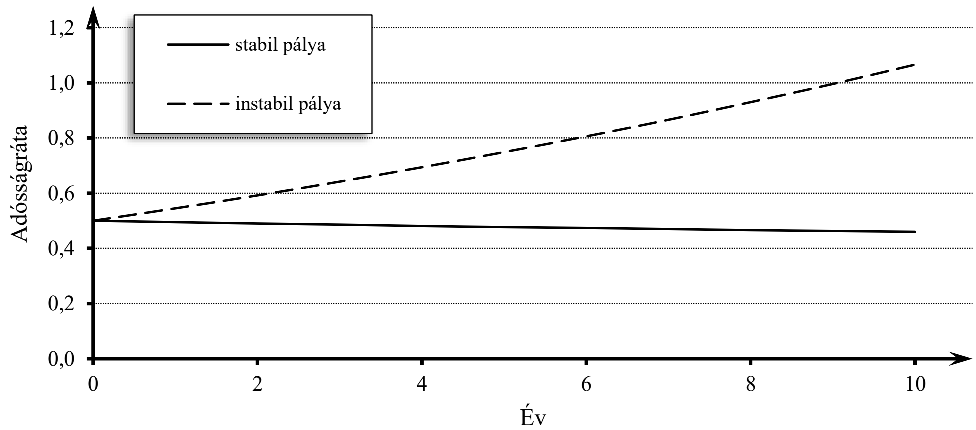
amely a következő két tartományban pozitív:

$$\rho < 1 \quad \text{és} \quad e < 0, \quad \text{vagy} \quad \rho > 1 \quad \text{és} \quad e > 0. \tag{2.24}$$

Az abnormális eset (2.24) első alesete, pedig ekkor (2.22) stabil. Történelmi példa: a II. világháború után a angolszász országok tartósan gyors növekedése és alacsony kamatlába jelentősen csökkentette a háborús államadósság-rátákat. A normális eset (2.24) második alesete. Az EU-ra elvben érvényes maastrichti kritériumok (ismérvek) szerint az államadósság GDP-hányada nem lehet 60% fölött, míg a költségvetési hiány GDP-hányada nem lehet 3% fölött.

A 2.5. ábra $e = -0{,}02$-re és $d_0 = 0{,}5$-re két esetet szemléltet: $\rho = 0{,}95$ (stabil) és $\rho = 1{,}05$ (instabil).

2.5. ábra. Két adósságráta-pálya



2.3. feladat. Az állandó relatív kamattényezős normális esetben ($\rho > 1$) hogyan stabilizálhatja az adósságrátát az $e_t = \varepsilon_0 + \varepsilon d_{t-1}$ visszacsatolás?

Az egyes országok nem magukban léteznek, hanem beágyazódnak a világgazdaságba. Ezért az országok kereskedelmi és hitelkapcsolatokban állnak a külvilággal. Ennek hatását legtömörebben az éves fizetési mérleg egyenlegük és év végi külső adósságuk mutatja. A teljesség kedvéért közöljük a modellből kihagyott fizetési mérleg egyenlegét és külső adósságot. Szokás szerint csillaggal különböztetjük meg őket hazai társaiktól. Legyen a GDP külső árfolyamon mért értéke Y_t^*, a t-edik év végén az *ország külső adósságának értéke* D_t^*, és legyen a *fizetési mérleg egyenlege*, azaz az export és az import különbsége B_t^*. Definíció szerint fennáll a következő azonosság:

$$D_t^* = D_{t-1}^* - B_t^*. \tag{2.17*}$$

Jelölje R_t^* a t-edik év külső adósság kamategyütthatóját, E_t^* az elsődleges fizetési mérleget, stb. A relatív külső adósság dinamikája

$$\frac{D_t^*}{Y_t^*} = \frac{R_t^* D_{t-1}^*}{G_t Y_{t-1}^*} - \frac{E_t^*}{Y_t^*}. \tag{2.20*}$$

Bevezetjük a GDP-arányos külső adósságot (d_t^*), a relatív külső kamategyütthatót (ρ_t^*) és a GDP-arányos külső egyenleget (e_t^*):

$$d_t^* = \frac{D_t^*}{Y_t^*}, \qquad \rho_t^* = \frac{R_t^*}{G_t^*} \qquad \text{és} \qquad e_t^* = \frac{E_t^*}{Y_t}. \tag{2.21*}$$

Ekkor (2.21*) segítségével (2.20*) tömörebben felírható:

$$d_t^* = \rho_t^* d_{t-1}^* - e_t^*. \tag{2.22*}$$

Szóban: az idei év végi külső adósságráta = relatív külső kamategyüttható × tavaly év végi külső adósságráta – GDP-arányos külső egyenleg.

Folytatjuk a 2.1. táblázat ismertetését. A költségvetési és az elsődleges egyenleg két idősora mutatja a köztük levő különbség, a kamatkiadás jelentőségét. Az államadósság ugyan csökken, de jó években jobban kellene csökkennie, és fel kellene készülni a népességöregedés költségvetést fenyegető időzített bombájára. A fizetési mérleg pozitív értéke (2016-ban 6%-os csúcsot ért el) miatt csökken látványosan a bruttó külső adósság (a 2013-as 118%-ról 2019-re 71%-ra). De nem szabad megfeledkezni az EU-támogatásoknak a fizetési mérleghez mérhető arányáról és a külföldi tőke be/kiáramlásáról, mindkettő a GDP több százalékát teszi ki.

A könyvben több helyen szerepelnek egy állam költségvetésének bizonyos bevételi és kiadási tételei: költségvetés bevétel/kiadás, nyugdíj- és egészségügyi biztosítás, valamint áfa és szja. Ezeket a 2.3. táblázat mutatja be hazánkra 2018-ra. Az összehasonlítási alap a GDP értéke, 42 073 mrd Ft volt. A táblázaton kívül mutatjuk be az elsődleges egyenleget: –397 mrd Ft, és a nettó kamatkiadásokat: 1 048 mrd Ft, s algebrai különbségük a költségvetési egyenleg: −1 445 mrd Ft, magyarul hiány. GDP-arányosan e három mutató 0,9%, 2,5% és 3,4%.

2.3. táblázat. 2018. évi magyar költségvetés teljesítése – részletek

Tétel	Bevétel mrd Ft	Kiadás mrd Ft	Bevétel GDP%-a	Kiadás GDP%-a
Központi költségvetés	19 873	21 318	47,2	50,7
Általános forgalmi adó	3 929	–	9,3	–
Személyi jövedelemadó	2 177	–	5,1	–
Nyugdíjbiztosítási Alap	3 263	3 354	7,6	8,0
Egészségbiztosítási Alap	2 319	2 434	5,5	5,8

3. Játékelméleti bevezető és elemi optimalizálás

Ebben a fejezetben néhány bevezető példát mutatunk be, amelyen szemléltethetők a nemkooperatív játékelmélet alapvető kérdései (Mérő, 1996). Az alaphelyzet: van két játékos, bármelyikük döntése érinti a másik játékos jólétét. Mivel nem kooperálnak egymással, nincs értelme az egyéni hasznosságmaximalizálásnak. Általában létezik egy (vagy több) egyensúly, amelyet mindkét játékosnak célszerű követnie. Az itt adott meghatározások szükségképpen vázlatosak. A 3.1. alfejezetben a hagyományos racionális játékokkal foglalkozunk, a 3.2. alfejezetben teret adunk a rendellenességeknek is. A 3.3. alfejezetben az optimalizálás elemi eszközeit mutatjuk be.

3.1. Racionális játékok

A játékosok indexe: 1 és 2. Legyen S_1 és S_2 a két játékos *stratégiáinak* véges halmaza; általános elemük s_1 és s_2: a két játékos stratégiái. Bár a társasjátékok általában többlépésesek, ügyes kódolással minden egyes játékos lépéssorozata egyetlenegy stratégiába sűríthetők. (Például az i-edik játékos egymás utáni lépéseit jelölje $a_1^i, a_2^i, \ldots$, akkor $s^i = a_1^i, a_2^i, \ldots$, feltéve, hogy a lépések megengedettek. A két játékos egymástól függetlenül dönt (nem kooperál), s hasznuk (hasznosságuk, profitjuk, nyereségük, nyereményük, kifizetésük) rendre $u_1(s_1, s_2)$ és $u_2(s_1, s_2)$ valós szám. Mindkét játékos saját hasznosságfüggvényét akarja maximalizálni, de a függvényérték, s így a maximum függ a másik játékos stratégiájától is. Egyelőre föltesszük, hogy mindkét játékos mindent tud a másik lehetőségeiről (S_j) és érdekeiről (u_j) – teljes információjú játék –, csupán annak konkrét s_j stratégiáját nem ismeri előre, $j \neq= i$, $i = 1, 2$. Neumann–Morgenstern (1944) foglalkozott először rendszeresen ilyen játékelméleti feladatokkal.

3.1. példa. *A fogolydilemma* (Raiffa, 1951). Az amerikai rendőrség letartóztat két gyanúsítottat, akik feltehetőleg együtt követtek el egy bűnt, de nincs rá elegendő bizonyíték. A két foglyot elkülönítik egymástól, és elkezdik őket vallatni. Amerikai szokás szerint, ha valamelyik gyanúsított vall (és a másik nem), akkor az „éneklő” enyhébb büntetést kap, esetleg szabadlábra kerül, sőt jutalmat is kap. A nyereménypár az 1. fogoly egyedüli közreműködése esetén $(3, -3)$, a 2. fogolyé esetén $(-3, 3)$. Ha mindkettő tagad (kooperál a másikkal), akkor szabadlábra kerülnek, jutalom nélkül, a nyereménypár: $(2, 2)$. Ha mindkettő „köp”, akkor mindketten börtönbe kerülnek, de a csökkentett büntetést $(-2, -2)$ jelöli.

Érdemes a fenti adatokat az ún. *kifizetési táblázatba* rendezni (3.1. táblázat):

3.1. táblázat. Fogolydilemma

2. bűnöző 1. bűnöző	Köp	Tagad
Tagad	$(-3, 3)$	$(2, 2)$
Köp	$(-2, -2)$	$(3, -3)$

Mi lesz a játék egyensúlya, ahonnan egyik félnek sem érdeke másképp döntenie? Erre általában nehéz válaszolni, de ebben a speciális esetben nincs probléma. Valóban, akármit lép a másik játékos, az egyik játékos mindig jobban jár, ha köp, mint ha tagad: a köpés *dominálja* a tagadást: pl. az 1. játékos szempontjából, ha 2. köp, az 1. tagadása rosszabb a köpésénél ($-3 < -2$); ha 2. tagad, az 1. tagadása ismét rosszabb a köpésénél ($2 < 3$). Az már más kérdés, hogy a (köp, köp) egyensúly kettőjüknek *együttesen* nem optimális, hiszen mindkét játékos veszít ahhoz képest, mint ha mindkettő tagadna.

Példánk végére érve, megjegyezzük, hogy a játékelmélet művelői általában szeretik ilyen játékos példákon megfogalmazni a problémákat, de ez nem zárja ki azt, hogy a modellek fontos kérdések megválaszolására is alkalmasak.

A fogolydilemma esetében gondoljunk a[z egyes] kőolaj-exportáló országok szervezetére, az OPEC-re (Organization of Petroleum Exporting Countries). A 3.2. táblázatban mutatjuk be ezeknek az országoknak a napi termelését, és bizonyított készleteit egymáshoz, valamint lakosságukhoz és az egész világhoz képest. (Kis lakosságú olajnagyhatalmak erősek.)

3.2. táblázat. OPEC tagországok fontos adatai, 2018 körül

Ország	Lakosság (m fő)	Napi termelés (m hordó)	Bizonyított készlet (mrd hordó)
Venezuela	28,9	2,3	300,0
Egyesült Emirátusok	9,6	3,1	97,8
Szaud-Arábia	33,7	10,5	266,6
Nigéria	186,0	2,0	37,1
Líbia	6,7	0,4	48,4
Kuvait	4,1	2,9	101,5
Irak	38,4	4,5	143,1
Irán	81,8	4,0	157,5
Angola	30,8	1,8	8,4
Algéria	42,2	1,3	12,2
OPEC összes	483,6	35,5	1 210,7
Világ összes	7 760,6	80,6	1 650,6

Megjegyzés. Kisebb OPEC országokat kihagytunk, és a számokat kerekítettük.

Az egyszerűség kedvéért legyen az egyik játékos Szaúd-Arábia, a másik pedig a többi tagország (Irak, Irán stb.). Két stratégiapár van: együttműködnek a termelés visszafogásában (s akkor magas olajárat érhetnek el) vagy sem. Az igazi OPEC-optimum az lenne, ha mindkét fél visszafogná a termelését. Mivel nem bíznak meg egymásban, mindkét fél abban reménykedik, hogy a másik visszafogja a termelését, ő pedig kihasználja az így adódó nagyobb keresletet. A valódi helyzet jóval bonyolultabb, de az elmélet mégis ad valamilyen magyarázatot a tényleges folyamatokra (lásd még 6.5. tétel és folytatása).

Következő példánkban egyik játékosnak sincs domináns stratégiája, ezért most nehezebb egyensúlyt találni. Példánk a mobiltelefon korszak előtt született, és egyesek érzékenységét sértheti a példában alkalmazott, egyébként játékos nemi megkülönböztetés.

3.2. példa. *A nemek harca.* A Fiú és a Lány szeret együtt lenni, de a Fiú inkább mérkőzésre menne, a Lány inkább moziba. Előre nem egyeztették a programot. A kifizetési táblázat most legyen a következő (3.3. táblázat):

3.3. táblázat. Nemek harca

Lány / Fiú	mérkőzés	mozi
mérkőzés	$(3, 2)$	$(1, 1)$
mozi	$(1, 1)$	$(2, 3)$

Valóban, a Fiú számára a „ mérkőzés" stratégia jobb, mint a „mozi", ha a lány is mérkőzésre megy ($3 > 1$), de rosszabb, ha a lány moziba megy ($1 < 2$). A Lány számára éppen fordítva. Vegyük észre azonban, hogy a (mérkőzés, mérkőzés) stratégiapárnak a következő vonzó tulajdonsága van: mindkét játékos számára optimális az ún. *egyensúlyi stratégia*, ha a másik játékos is a párban szereplő stratégiát választja. (Ezt a stratégiapárt fogjuk felfedezőjéről (1951) *Nash-egyensúlynak* nevezni.) Valóban, ha a lány mérkőzésre megy, akkor a fiú számára is a mérkőzés optimális ($3 > 1$); és ha a fiú mérkőzésre megy, akkor a lány számára is a mérkőzés az optimális választás ($2 > 1$).

Hasonló érveléssel belátható, hogy a (mérkőzés, mérkőzés) pár mellett a (mozi, mozi) pár is Nash-egyensúly. Felvetődik a kérdés: a résztvevők melyiket válasszák a két egyensúly közül? Hogyan koordinálja a szerelmespár a választást? (Hogy ne a lány menjen a mérkőzésre és a fiú a moziba!) Általában nincs megoldás, de bizonyos esetekben felülről eldöntik a kérdést: például a legtöbb országban ma már jobb oldali közlekedés van, de néhány szigetországban (Nagy Britannia, Japán stb.) bal oldali.

Még nehezebb a helyzet a következő példában, ahol még Nash-egyensúly sem létezik, legalábbis közönséges értelemben nem.

3.3. példa. *Érmepárosítás.* Két játékos egyidejűleg elhelyez 5–5 Ft-ot Fejre vagy Írásra. Ha azonos állásút választanak, akkor az 1. játékos elnyeri a 2. pénzét is; ha különbözőt, akkor a 2. játékos nyeri el az 1.-jét. Feltesszük, hogy a játékosok haszna azonos a pénzbeli haszonnal. Ezt írja le a 3.4. táblázat.

3.4. táblázat. Érmepárosítás

2. („oszlop") játékos / 1. („sor") játékos	Fej	Írás
Fej	$(5, -5)$	$(-5, 5)$
Írás	$(-5, 5)$	$(5, -5)$

3.1. feladat. Fogalmazza át a feladatot a tizenegyesrúgásra, ahol F a balra rúgásnak, illetve vetődésnek, I a jobbra rúgásnak, illetve a vetődésnek felel meg!

1700 körül keletkezett elképzeléseket újra felfedezve, 1920 után Borel francia matematikustól és Neumann Jánostól (aki egyaránt volt kiemelkedő matematikus, fizikus és közgazdász) származik az ötlet, hogy az eddigi *tiszta* stratégiák mellé *kevert* stratégiákat kell bevezetni, ahol a tiszta stratégia kiválasztása a véletlenen alapszik (vö. 16.1. alfejezet). Ekkor egyik játékos sem tudja kiismerni a másik döntését.

3.3. példa. *Az érmepárosítás folytatása a véletlen bevezetésével.* Könnyen belátható, hogy a érmepárosításban egyensúlyi megoldás, ha mindkét játékos egymástól függetlenül 1/2–1/2 valószínűséggel választja a Fejet vagy az Írást. Valóban, legyen rendre p és q a két játékos F választásának a valószínűsége, azaz $1-p$ és $1-q$ a két játékos I választásának a valószínűsége (16.1. példa). Ekkor az 1. játékos *várható* nyeresége a négy elemi esemény nyereségének a várható értéke, azaz

$$u_1(p,q) = pq - p(1-q) - (1-p)q + (1-p)(1-q) = 2(2q-1)p - 2q + 1.$$

Adott q esetén p optimumára három eset van: *a)* $2q > 1$, amikor $p_q = 0$, *b)* $2q < 1$, amikor $p_q = 1$ és *c)* $2q = 1$, amikor p_q határozatlan. A tiszta stratégiákat kizártuk, marad tehát c): $q^* = 1/2$. Szimmetria miatt $p^* = 1/2$.

Azaz mindkét játékos földobja a saját pénzét, és ahogy esik, úgy puffan. Ekkor mindkét játékos várható nyeresége 0. Ha azonban az 1. játékos eltér e szabálytól, pl. $p > 1/2$, akkor a 2. játékos ezt hosszú távon kihasználhatja, s mindig I-t tesz: $q = 0$, tehát az érmék különbözőségének valószínűsége 1/2 fölé kerül, s a 2. játékos nyer.

A kevert stratégiák bevezetésével kétszemélyes nullaösszegű játékokra és tetszőleges számú tiszta stratégiára Neumann látta be az egyensúly létezését 1928-ban. Ezen a ponton hangsúlyozzuk a *nullaösszegű* játékok választóvíz szerepét az elméletben és a gyakorlatban. A legtöbb társasjáték nullaösszegű: amit az egyik megnyer, azt a másik elveszíti. Nem véletlen, hogy a játékelmélet születésekor nullaösszegű játékokat vizsgáltak.

Ugyanakkor a valóságban ez nagyon speciális feltevés: a legtöbb játékban a nyereségek összege lehet pozitív vagy negatív. Persze, a nyeremények eltolásával minden nulla összegű játék tetszőleges pozitív/negatív *állandó összegű* játékká tehető, s ez közömbös. Például a sakkban a vereség nem –1, hanem 0 pontot ér, és a döntetlen nem 0, hanem 1/2 pontot jelent. A játék értéke ezért 1/2. Fiatalkoromban a labdarúgó-bajnokságban is hasonló pontozás volt: a győzelem 2, a döntetlen 1 és a vereség 0 pontot ért. Aztán a döntetlen elleni harc miatt változott a helyzet: a győzelem ma már 3 pontot jelent, s ezért a játék összege ma már nem állandó. Sokkal fontosabb valódi példák: a háborút vagy a sztrájkot tekinthetjük negatív összegű játéknak, míg a nemzetközi kereskedelmet vagy az együttműködést pozitív összegűnek.

Mielőtt tovább mennénk, három feladatot tűzünk ki.

3.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 3.2. példában, a *nemek harcában* a Fiú $(2/3, 1/3)$ és a Lány $(1/3, 2/3)$ kevert stratégiája az egyetlen teljesen $(0 < p, q < 1)$ kevert Nash-egyensúly!

3.3. feladat. *Gyáva nyúl.* Két autós a következő életveszélyes játékkal szórakozik. Egy keskeny híd két végéről indulnak egymással szembe – és sokan nézik őket. Két döntés lehetséges: Kitérni vagy Hajtani. Ha mindkettő Hajt, akkor egymásnak ütköznek a hídon, a „nyereségpár” $(-3, -3)$. Ha mindkettő Kitér, akkor leégnek a nézők előtt: a „nyereségpár” $(1, 1)$. Ha az első Kitér, s a második Hajt, akkor az 1. pofára esik, a második sikert arat: a „nyereségpár” $(0, 2)$, és hasonlóan a szimmetrikus esetben $(2, 0)$.

a) Van-e a játéknak tiszta Nash-egyensúlya?

b) Határozzuk meg a játék kevert Nash-egyensúlyát!

c) Mi a valószínűsége, hogy a kevert Nash-egyensúlyban a versenyzők életben maradnak?

d) Melyik egyensúly adja a legnagyobb hasznot az 1. játékosnak?

Egy játékot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha azonos a stratégiák halmaza, és a két játékos kifizetési táblázata az ÉNY–DK átlóra vett tükörképe. A felsorolt játékok közül szimmetrikus *a fogolydilemma* (3.1. példa), az érmepárosítás (3.3. példa) és *a gyáva nyúl* (3.2. feladat). Azt várnánk, hogy *minden* egyensúlyi stratégiapár elemei is azonosak, ez azonban általánosan nem igaz (lásd 3.2. feladat): a két tiszta stratégiapár antiszimmetrikus, csak a kevert egyensúlyi pár szimmetrikus.

3.4. feladat. *Koordinációs játék.* Kisvadra lehet egyedül vadászni, nagyvadra nem. Szimmetrikus játékban elegendő az 1. játékos nyereségtáblázatát feltüntetni.

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lássuk be, hogy két szigorú tiszta Nash-egyensúly és egy kevert szimmetrikus Nash-egyensúly létezik!

Eddig olyan játékokat mutattunk be, ahol a játékosok egyszer és egy időben lépnek. Most olyan játékra hozunk példát, ahol a két játékos egymást követve lép.

3.4. példa. *Ragadozó játék.* Egy piacot egy bent lévő (I = incumbent) vállalat monopolizál, de egy másik vállalat (E = entrant) próbál belépni. Ha E belép, akkor I kétféleképpen válaszolhat: vagy *alkalmazkodhat* a belépőhöz, visszafogva kibocsátását, hogy megőrizhesse a piaci árat; vagy felveheti a harcot a belépővel: *ragadozó magatartást tanúsít*, leengedi az árat, hogy kiszorítsa a belépőt. A játék kifizetési táblázatát (más néven, stratégiai alakját, amelyet eddig elemeztünk) a 3.5. táblázat adja.

3.5. táblázat. Ragadozó játék

Bent levő vállalat (I) Belépő vállalat (E)	harcol	alkalmazkodik
kint marad	$(0, 2)$	$(0, 2)$
belép	$(-3, -1)$	$(2, 1)$

A stratégiai alak elemzése két Nash-egyensúlyt ad: (E kint marad; I harcol, ha E belép) és (E belép; I alkalmazkodik, ha E belép). Logikailag szinte ránézésre látható, hogy az első egyensúly elfogadhatatlan (E kint marad, de I mégis arra készül, hogy E belép) és nem is hiteles I fenyegetése, hogy harcol (nyeresége –1), míg alkalmazkodásnál a nyereség 1. Itt a (belép, harcol) stratégiapár időben következetlen. Dinamikus játékot nem mindig lehet a kifizetési mátrixszal leírni.

Végül két valódi társasjátékot vázolok, amelyben az eddig összenyomott lépések ki vannak bontva, és a második játékban a játékosoknak csak részleges információjuk van az ellenfelek lehetőségeiről.

3.5. példa. Sakk. A sakkban két játékos (a világos és a sötét) játszik egymás ellen. Meghatározott szabályok szerint léphetnek felváltva, s az győz, aki a másiknak mattot ad. Döntetlen a játék, ha vagy az egyik fél nem tud lépni, pedig a királya nincs sakkban; vagy egy helyzet háromszor megismétlődik. Tökéletes információjú véges játékról van szó, de olyan bonyolultról, hogy „eddig még” senki sem tudta meghatározni a győztes stratégiát. Sejtés: a világos játékos legalább döntetlent el tud érni.

3.6. példa. Kanaszta. Véletlenül osztják szét a játékosok között a lapokat. Francia kártyával játssza két vagy három személy. Egyszer is lehet játszani, de igazán az ismétlés az érdekes. A lapokat csak bizonyos sorozatokba (pl. legalább 3 db király) rendezve lehet lerakni, de csak akkor, ha az először lerakott lapok pontértéke elér egy küszöböt. Aztán még ki lehet egészíteni a csomagokat. A(z alap)játék akkor ér véget, ha valaki lerakja az összes lapját. A kézben maradó lapok pontértékét levonják. Nem tökéletes információjú játék, mert a játékosok nem ismerik egymás kézben lévő lapjait.

Talán nem érdektelen megemlíteni, hogy történetileg a játékelmélet valóban a társasjátékokból indult ki, és számos úttörője szenvedélyes kártyajátékos volt (lásd még a 17.4. alfejezetet).

3.2. Játékelméleti rendellenességek

Játékelméleti rendellenességekkel folytatjuk áttekintésünket. Ezek olyan esetek, amelyek nem jól illeszkednek a klasszikus játékelméletbe.

3.7. példa. *Dollárárverés.* Az asztalra ki van téve egy 1 dolláros érme. Két játékos 200–200 darab egycentessel kezdi a játékot. Felváltva licitálhatnak a dollárra, lépésenként legalább 1 érmével emelve a tétet. Az nyeri el az 1 dollárost, aki utoljára tudja vagy hajlandó emelni a tétet, de mindkét végleges licitet a játékvezető nyeri el, aki nem részese a játéknak.

Nem szabványos játék, de jól jellemzi a konfliktusok fokozatos kiterjedését. A játékosok annyira azért racionálisak, hogy ellenfelüket minél olcsóbban akarják legyőzni, ezért lépésenként csak 1 c-tel emelik a másik tétjét. Tegyük föl, hogy a kezdő játékos következik, és eddig $x-1$ darab érmét tett az asztalra, s ellenfele x darabot. Az $(x-1, x)$ ajánlatpárt most az $(x+1, x)$ pár követi. Ugyanis így költsége csak 2 c-tel, viszont remélt nyereménye 0-ról 1 $-ra növekszik. Ugyanakkor a két játékos összköltsége $(2x+1)$ c, azaz $(51\ c, 50\ c)$-tól kezdve az együttes költség több, mint 1 $, tehát társasági szinten irracionálissá válik a részvétel. Ennek ellenére lehetséges, hogy a játék csak $(199\ c, 200\ c)$-n áll meg, amikor az együttes költség már majdnem 4 $.

Korabeli történeti példa a vietnámi háború, amelyben a két fél: az USA és Észak-Vietnám 1960 és 1969 között fokozatosan emelte a tétet. Mindketten hatalmas anyagi és emberi veszteségeket szenvedtek, végül az USA lépett ki 1975-ben.

3.8. példa. Tisztességes osztozkodás. 100 db 5Ft-os érmét kell elosztani két fél között. Az 1. játékos x érmét ajánl fel a 2. játékosnak, és megtartana magának $100-x$-et. A 2. játékos vagy elfogadja ezt az ajánlatot és akkor hozzájut $5x$ forinthoz, vagy elutasítja, és akkor egyik játékos sem kap semmit sem. A $(99, 1)$ pár az egyedüli logikus Nash-egyensúly: a 2. játékos 1 érmével is beéri (az is több, mint a semmi), de a játékelméleti kísérletekben 30–40 érménél kevesebbel nem szokták beérni. Ebben a játékban a játékosok nem követik a dinamizált (szakszóval: végjáték tökéletes) Nash-egyensúlyt. Ha a játékot sokszor megismételnék, akkor lenne remény a kiegyezésre, de ennek elemzése meghaladná a fejezet kereteit. A fejezet végén az egyszerűbb fogolydilemmát azért dinamizáljuk!

3.9. példa. (Fogolydilemma újratöltve.) Hogyan befolyásolja a megfogalmazás (a „csomagolás") a játékot? Induljunk ki a fogolydilemma 3.6. táblázatban átfogalmazott változatából:

3.6. táblázat. Fogolydilemma

2. játékos 1. játékos	Együttműködik	Verseng
Együttműködik	$(3, 3)$	$(1, 4)$
Verseng	$(4, 1)$	$(2, 2)$

Ismert, hogy az egyensúlyi megoldás a (Versengés, Versengés).
Fogalmazzuk át a feladatot a következőképpen:

3.7. táblázat. Átfogalmazott fogolydilemma

	Magadnak	Másiknak
Együttműködik	1	2
Verseng	2	0

Ha az *együttműködés* gombot nyomod meg, akkor magadnak 1-et adsz, a másiknak 2-t; ha a *verseng* gombot nyomod meg, akkor magadnak 2-t adsz, a másiknak 0-t. Belátható, hogy az eredő az előző táblázatban leírt nyereménypárok táblázata. Ennek ellenére ezt a játékot a kísérletekben sokkal kooperatívabban játsszák, mint az eredetit, mert nyilvánvaló benne, hogy csak a másiktól jöhet az igazi nyereség.

A következő példa az igazmondásra ösztönzésről szól (vö. 16.2. alfejezet érdekeltségi feltételeivel).

3.10. példa. Salamoni ítélet (Biblia). Két asszony egyszerre szült egy helyen. Az egyiknek azonnal meghalt a gyereke, és magáénak követelte a másikét. Külső szemlélő utólag már nem tudta megállapítani, hogy valójában kié a gyerek. Salamon izraeli király (i.e. 1000. körül) a következő bölcs ítéletet hozta: „kettévágom a gyereket, és mindketten megkapják a gyerek felét". Az igazi anya rögtön lemondott a gyerekről (neki a gyerek élete a legfontosabb), s ebből Salamon megtudta, hogy ki az igazi anya, és annak ítélte a gyermeket.

A következő példa a függetlenül hozott döntések összehangolásáról szól.

3.11. példa. Férjek és feleségek (vö. Shakespeare: A makrancos hölgy). A brit tv-ben nagy sikerrel játszották a következő játékot. Több házaspárt behívnak, elkülönítik a férjeket és a feleségeket. Egy sor kérdést tesznek föl nekik: el akar-e menni koncertre vagy sem; részt vesz-e egy tüntetésen vagy sem stb. Minél több válasz egyezik egy házaspárnál, annál nagyobb a nyereményük. Hogy ne állapodhassanak meg a párok előre az egyes kérdésekre adandó válaszról, a kérdéseket a két félnek egymástól független sorrendben adják föl. Mi az optimális stratégia? Előre megállapodnak abban, hogy a férj mindig azt válaszolja, amit gondol, és a feleség látatlanban igazodik a férje ismert ízléséhez – vagy mindig fordítva. A lényeg: az ügyes koordináció.

A következő példa egy szokatlan, de elgondolkodtató játékot ismertet.

3.12. példa. Az egyszám-játék. A játéknak sok részvevője van. Mindenkinek gondolnia kell egy természetes számot, amelyet beküld a játékvezetőhöz. Az nyer, aki a legkisebb olyan számot gondolta, amelyet más nem gondolt. (Ha nincs ilyen szám, akkor nincs nyertes!) Ha $2n+1$ részvevő van, akik közül legrosszabb esetben éppen ketten választják az 1-et, a 2-t, $\ldots, n$-et, akkor $n+1$ lesz a legkisebb lehetséges nyerőszám. Minden más esetben kisebb a nyerőszám. A Mérő-féle Füles-pályázaton több mint 8 000 részvevő indult, több mint 2 000 különböző számot küldtek be, és a legkisebb „egyedi" szám a 120 volt.

A következő példa egy izgalmas kísérletről számol be, amely azt vizsgálta: kialakulhat-e kooperáció egy olyan világban, ahol mindenki önző?

3.13. példa. Stratégiák kísérleti versenye a fogolydilemma ismételt lejátszásánál. Axelrod 1979-ben versenyre hívott fel sok ismert tudóst. Minden részvevőnek be kellett küldenie egy számítógépes programmal leírt stratégiát, amelytől a maximális nyereményt remélheti egy körversenyben, ahol a fogolydilemmát sok menetben lejátsszák, de a részvevők előre nem ismerik a játék hosszát. A beérkező 14 program közül Rapoport szerezte a legnagyobb nyereséget a *Tit for Tat* (szemet szemért) nevű stratégiájával. Mindössze két sorból állt a program: 1. Az első lépésben kooperál. 2. Ezután azt lépi, amit a partnere az előző lépésben lépett. Axelrod két közös vonást fedezett fel a sikeres programokban: barátságosságot és megbocsátást (a részleteket Mérő 1996 tartalmazza).

Miután széles körben közölte a verseny eredményeit, Axelrod 1982-ben egy második versenyt is kiírt. Ezúttal sokkal több részvevő indult, de ismét csak Rapoport nyert, ugyanazzal a programmal. Most Axelrod három újabb jegyet is fölfedezett a sikeres programok között: provokálhatóságot, reakcióképességet és kiismerhetőséget. Érdekes, hogy Rapoport programja mind az öt tulajdonságot maximálisan tartalmazta, és utólag megállapítható, hogy ez volt ismételt sikerének a kulcsa.

3.3. Optimalizálás elemi módszerrel

A modern közgazdaságtanban alapvető szerepet játszik, hogy a szereplők szeretnének a lehető legjobban járni. Minden szereplőnek van célfüggvénye, és vannak korlátai (figyelembe veendő feltételei). A „lehető legjobb” azt jelenti, hogy ezen korlátok (feltételek) mellett maximalizálják a célfüggvényüket. Például minden fogyasztó rá jellemző arányban szereti elkölteni a pénzét, vagy általánosabban fogalmazva: a költségvetési feltétele mellett maximalizálja a hasznosságfüggvényét (5. fejezet). A vállalatok a profitfüggvényüket maximalizálják, de a költségfüggvényüket minimalizálják (6. fejezet). Középiskolából ismert, de már Eukleidésznél (i.e. 300) megtalálható a legegyszerűbb feltételes maximumfeladat: adott kerületű téglalapok közül melyik területe a maximális? A négyzeté.

A középiskolásokra való tekintettel általában elkerüljük az optimalizálásban alkalmazott függvényderiválást, és csak a konkáv *kvadratikus* vagy ahhoz hasonló függvény maximalizálásra szorítkozunk. Egy függvényt akkor nevezünk *szigorúan konkávnak*, ha bármely két pontját összekötő egyenes, a húr a függvény alatt halad. Nem szigorú konkavitás esetén a húr részben vagy egészben egybeeshet a függvénnyel. Kezdjük a kvadratikus függvénnyel:

$$y = Bx - Ax^2, \qquad A, B > 0. \tag{3.1}$$

3.1. tétel. *Az $y = Bx - Ax^2$ függvény maximumhelye $x^o = B/(2A)$ és a maximum értéke $y^o = B^2/(4A)$.*

Megjegyzés. Ha beszorozzuk a maximalizálandó függvényt –1-gyel, akkor az $y = -Bx + Ax^2$ konvex függvény minimumát kapjuk.

Fontossága és érdekessége miatt két bizonyítást adunk a tételre.

1. bizonyítás. Annak idején a másodfokú egyenlet megoldó képletének levezetésekor teljes négyzetté alakítottuk (3.1)-et (illetve ellentettjét), most is ezt tesszük:

$$Ax^2 - Bx = A\left(x - \frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{B^2}{4A^2}.$$

A jobb oldal második tagja állandó, első tagja akkor minimális, ha 0, azaz a tétel áll. □

A 2., általánosítható bizonyítás előtt egy speciális esetet vizsgálunk: $A = B = 1$.

3.13. példa. Elegendő az $x \in [0, 1]$-ra szorítkozni. Az $y = x - x^2 = x(1 - x)$ függvény maximumát a négyzetre emelt mértani és a számtani közép közti egyenlőtlenség szolgáltatja:

$$x(1 - x) \leq \frac{(x + 1 - x)^2}{2^2} = \frac{1}{4},$$

s a maximumot adó egyenlőséget $x = 1 - x$, azaz $x^o = 1/2$ adja.

Megemlítjük, hogy ha kicsit eltérünk az optimumhelytől, akkor az optimum értéke alig változik: például $x = 0,4$ pontban 20%-kal tér el az optimumhelytől, de a hozzá tartozó függvényérték ($y = 0{,}24$) csak 4%-kal kisebb, mint az optimum értéke.

2. bizonyítás. Az ötletet a 3.13. példa adja. Az általános esetben $y = x(B - Ax)$, de erre még nem lehet alkalmazni a mértani és a számtani közép közti egyenlőtlenséget. Ha $x < 0$ vagy $B - Ax \leq 0$, akkor $y \leq 0$, ezért feltehetjük, hogy $x, B - Ax > 0$. Ha a célfüggvlnyt még beszorozzuk A-val, akkor már rendben vagyunk:

$$Ay = Ax(B - Ax) \leq \frac{B^2}{4};$$

és a bal, illetve a jobb oldal egyenlősége csak a két tényező egyenlősége esetén teljesül: $Ax = B - Ax$, azaz $x = x^{\mathrm{o}}$. □

Mielőtt továbblépnénk, szükségünk lesz a következő nevezetes tételre.

3.2. tétel. *$n > 1$ darab pozitív szám számtani közepe legalább akkora, mint a mértani közepe:*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},$$

s egyenlőség csak a számok egyenlősége esetén áll.

Bizonyítás. Cauchy-tól (a korszakalkotó 19. századi francia matematikustól) származó bizonyítás lényege: a teljes indukciót nem n-ről $n+1$-re, hanem $n = 2^k$-ról $2n = 2^{k+1}$-re végezzük, s a közbülső eseteket visszavezetjük a hatványesetekre.

a) Duplázás. Legyen az első n számunk számtani és mértani közepe rendre A és G, a második n számunké pedig A' és G'. Ekkor az $(A + A')/2$ és $\sqrt{GG'}$ a $2n$ szám számtani, illetve mértani közepe. Bizonyítandó:

$$\frac{A + A'}{2} \geq \sqrt{GG'}.$$

Az n számra vonatkozó indukciós feltevés szerint $A \geq G$ és $A' \geq G'$, tehát $(G+G')/2$ legfeljebb akkora, mint a bal oldali kifejezés. Viszont a két számra vonatkozó egyenlőtlenség miatt $(G + G')/2$ legalább akkora, mint a jobb oldali, ezért a fenti egyenlőtlenséget bebizonyítottuk.

b) Visszavezetés. Tegyük föl, hogy $n < m < 2n$, és legyen most A és G az m szám számtani és mértani közepe. Úgy egészítsük ki az $x_1, \dots, x_m$ számból álló sorozatot $2n$-tagúra, hogy a $2n$-tagra érvényes egyenlőségből következzék az m-tagra érvényes egyenlőtlenség. Ehhez válasszuk $x_{m+1} = \cdots = x_{2n} = A$-t, ekkor a $2n$ szám számtani közepe változatlanul A. Írjuk föl a $2n$ darab számra már bizonyított egyenlőtlenséget, pontosabban annak $2n$-edik hatványát: $A^{2n} \geq G^m A^{2n-m}$. Egyszerűsítve A^{2n-m}-nel, adódik a bizonyítandó $A^m \geq G^m$. Az egyenlőség bizonyítását az Olvasókra bízzuk. □

A 3.1. tételhez hasonlóan járhatunk el az általánosabb szorzatfüggvény általánosabb feltételes maximalizálásánál. E tétel jelöléseit a közgazdaságtani szokások szerint választjuk meg.

3.3. tétel. *Legyen $\alpha < 1$, p, q, x, y és m pozitív valós szám! Tekintsük a következő feltételes maximumfeladatot:*

$$z = x^{\alpha} y^{1-\alpha} \to \max, \tag{3.2}$$

feltéve, hogy

$$px + qy = m. \tag{3.3}$$

A feltételes maximumhely

$$x^{\mathrm{o}} = \frac{\alpha m}{p} \qquad \text{és} \qquad y^{\mathrm{o}} = \frac{(1-\alpha)m}{q}. \tag{3.4}$$

Megjegyzés. Az természetes, hogy α növekedésekor x^o növekszik, y^o csökken, de hogy a kapcsolat lineáris, az már meglepő.

Bizonyítás. Először tegyük föl, hogy α racionális szám, például $\alpha = r/s$, r és $s > r$ természetes szám; azaz $1-\alpha = (s-r)/s$. Ekkor a (3.2)-vel ekvivalens $z^s = x^r y^{s-r}$ feltételes maximumát keressük. Ahhoz, hogy az s darab pozitív szám mértani és számtani közepe közti egyenlőtlenséget alkalmazhassuk, r, illetve $s-r$ darab

$$\frac{px}{r} \quad \text{és} \quad \frac{qy}{s-r}$$

értékű számot veszünk, amelyek szorzata konstansszorosa az eredetinek, összege viszont m állandó. Egyenlőség, azaz maximum akkor és csak akkor valósul meg, ha

$$\frac{px}{r} = \frac{qy}{s-r},$$

azaz (3.3) folytán a (3.4)-beli értékeknél. □

Megjegyzés. * A matematikai analízis eszközeivel belátható, hogy ha α irracionális valós szám, akkor r_n/s_n racionális számok sorozatával közelítve α-t, a megfelelő (x_n, y_n) számok tartanak az eredeti maximumhelyhez.

Az alkalmazásokban szükségünk lesz a 3.3. tétel három következményére. A lényeg, hogy a célfüggvény monoton növekvő transzformációja változatlanul hagyja a maximumhelyeket.

1. következmény. *Legyen $\gamma, \beta > 0$. Ha (3.2) helyett a némileg általánosabb*

$$z = x^\gamma y^\beta \tag{3.5}$$

célfüggvénynek a (3.3) feltétel melletti maximumát keressük, akkor az az

$$\alpha = \frac{\gamma}{\gamma + \beta} \tag{3.6}$$

helyettesítéssel visszavezethető (3.4)-re.

2. következmény. *Ha (3.2)-t logaritmizáljuk, és a log-ban additív*

$$\alpha \log x + (1-\alpha) \log y \tag{3.7}$$

célfüggvényt maximalizáljuk, akkor a feltételes maximumhely változatlanul (3.4).

Megjegyzés. Lényegtelen, hogy milyen alapú logaritmussal dolgozunk ($a > 1$), de sok esetben célszerű az ún. *természetes* alappal dolgozni, ahol $e = 2{,}718\ldots$ az alap (vö. 6.1. segédtétel következménye).

3. következmény. *Ha (3.5)-öt logaritmizáljuk, és a log-ban additív*

$$\gamma \log x + \beta \log y \tag{3.8}$$

célfüggvényt maximalizáljuk, akkor a (3.6) helyettesítéssel a feltételes maximumhely változatlanul (3.4).

3.14. példa. Bizonyos esetekben (3.8) helyett a sokkal egyszerűbb

$$U(x, y) = \gamma x + \beta y \tag{3.9}$$

hasznosságfüggvényt maximalizáljuk (lineáris programozás). Ez azonban nagyon elfajult eset, és az optimum is elfajult:

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{o}} &= \frac{m}{p}, && \text{ha} && \frac{\gamma}{\beta} > \frac{p}{q}, \\ &\text{mindegy}, && \text{ha} && \frac{\gamma}{\beta} = \frac{p}{q}; \\ x^{\mathrm{o}} &= 0, && \text{ha} && \frac{\gamma}{\beta} > \frac{p}{q}; \end{aligned}$$

valamint

$$y^{\mathrm{o}} = \frac{m - px^{\mathrm{o}}}{q}$$

Közgazdasági példa: ha közömbös, hogy margarint vagy vajat eszünk, akkor mindig az olcsóbbat választjuk.

Most kimondjuk egy általános konkáv skalár–skalár függvény maximumának a kalkulusból ismert elégséges feltételét. (Mivel deriválunk, ezért *-gal jelezzük a határsértést.) Az intuitív megértéshez nem kell tudni deriválni. Elegendő, ha az Olvasó elfogadja, hogy az $f'(x)$ szám az f függvény érintőjének a meredeksége az x pontban. Belátható, hogy a konkáv függvény érintőjének a meredeksége monoton csökken. Igaz a

3.4.* tétel. *Egy sima konkáv f függvény a korlátos $[a, b]$ szakaszon felvett maximumára három lehetőség létezik:*

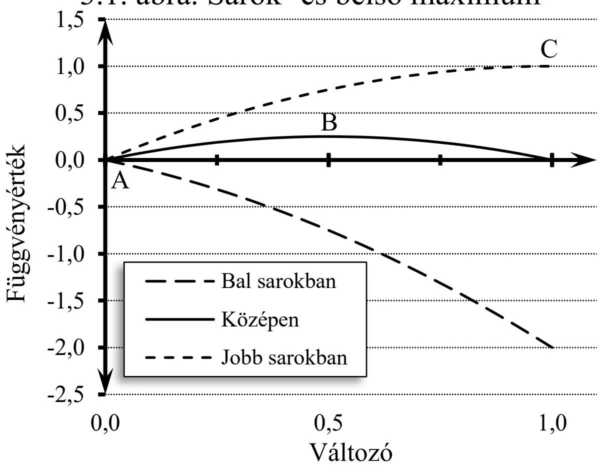
$$\textit{vagy} \quad a < x^{\mathrm{o}} < b, \quad \textit{ha} \quad f'(x^{\mathrm{o}}) = 0; \tag{3.10 – 1}$$

$$\textit{vagy} \quad x^{\mathrm{o}} = a, \quad \textit{ha} \quad f'(a) \le 0; \tag{3.10 – 2}$$

$$\textit{vagy} \quad x^{\mathrm{o}} = b, \quad \textit{ha} \quad f'(b) \ge 0. \tag{3.10 – 3}$$

A 3.1. ábra szemlélteti a három esetet az $f(x) = x(a - x)$ függvényre, $a = -1$, 1 és 2 esetén, ahol A, B és C jelöli a bal sarki, a lokális és a jobb sarki optimumot.

3.1. ábra. Sarok- és belső maximum



A fejezet végén megvizsgálunk egy fontos egyenlőtlenséget, amelyet az elemi optimalizálásnál alkalmazhatunk.

Induljunk ki az f skalár-skalárfüggvény szigorú konkavitásának következő definíciójából:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \qquad 0 < \lambda < 1, \qquad x \neq y.$$

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy szigorúan konkáv függvény esetén bármely két pontot összekötő húr a függvény alatt fekszik. Ezt általánosítja több pontra a

3.5. tétel. *(Jensen egyenlőtlenség, 1906.) Legyen f egy szigorúan konkáv skalár–skalár függvény az $[a,b]$ szakaszon értelmezve, legyen $(x_i) \in [a,b]$ és $\lambda_i > 0$, amelyre $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Ekkor*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i), \tag{3.11}$$

és egyenlőség csak az $x_1 = \cdots = x_n$ esetben áll.

Megjegyzések. 1. A 3.5. tétel egyik szemléletes jelentése: az $(x_i, f(x_i))$ pontokban λ_i nagyságú tömegeket helyezünk el. Ekkor az x-tömegközpontban vett f-érték az $f(x_i)$-k tömegközpontja fölött van.

2. Másik szemléletes jelentése a 16. fejezetben bevezetendő várható értéken alapul: az X változó várható értékének konkáv függvénye legalább akkora, mint az X függvényének a várható értéke. Képletben: $f(\mathbf{E}X) \geq \mathbf{E}f(X)$.

3. (3.11) a következőképp alkalmazható az optimalizálásnál: tegyük föl, hogy $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ állandó, és a $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ összeget kell maximalizálni. Ekkor a maximumhely x_i-k egyenlőség esetén adódik, és értéke (3.11) bal oldala.

Bizonyítás. $n = 2$-re a Jensen-egyenlőtlenség a konkavitás.

Most $n-1$-ről n-re lépünk. Legyen $\lambda_i' = \lambda_i/(1-\lambda_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ és $x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i' x_i$, $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i' = 1$. Ekkor

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = f((1-\lambda_n)x + \lambda_n x_n).$$

A jobb oldalra először alkalmazzuk a 2-tagú, majd az $n-1$-tagú egyenlőtlenséget:

$$f((1-\lambda_n)x + \lambda_n x_n) \geq (1-\lambda_n)f(x) + \lambda_n f(x_n) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i) + \lambda_n f(x_n).$$

□

3.15. példa. Aki a kalkulust ismeri, az egyszerűen beláthatja, hogy $f(x) = \log x$ deriváltja $1/x$ (vö. 10.4.* tétel bizonyítása), csökkenő függvény, azaz f szigorúan konkáv függvény ($x > 0$), tehát megkapja a Jensen-egyenlőtlenség egyik legnevezetesebb speciális esetét:

$$\log\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \log x_i.$$

Ez az egyenlőtlenség fontos szerepet játszik a közgazdaságtanban is (pl. 5.2. alfejezet).

Behelyettesítve e^x-be, (ahol $e = 2{,}718\ldots$) adódik a súlyozott számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség (a 3.2. tétel általánosítása):

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}. \tag{3.12}$$

Meglepő lehet, hogy a logaritmusfüggvény konkavitásának elemi bizonyítása viszont (3.1) speciális esete ($n = 2$):

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \ge x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}, \tag{3.12'}$$

sőt, elegendő a hagyományos alak is:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \ge \sqrt{x_1 x_2}.$$

3.5. feladat. Követve a 3.3. tétel bizonyításában alkalmazott transzformációt, igazoljuk a 2. következményt a Jensen-egyenlőtlenséggel a következő szereposztásban:

$$x' = \frac{px}{\alpha} \qquad \text{és} \qquad y' = \frac{qy}{1-\alpha}!$$

4. Bonyolultabb lineáris dinamika

A 4.1. és a 4.2. alfejezetben a 2.1. alfejezetben tárgyalt elsőrendű differenciaegyenletet általánosítva, olyan (másodrendű) dinamikus rendszert vizsgálunk, ahol a jelen állapot nemcsak az egy, hanem a két időszakkal korábbi állapottól is függ – mindkét esetben lineárisan, megkülönböztetve a pozitív és nempozitív diszkrimináns esetét. A 4.3. alfejezetben visszatérünk az elsőrendű differenciaegyenletekre, de skalár helyett vektorváltozóval. A 4.4. alfejezetben egy olyan modellt vizsgálunk, amelyben a beruházások igazodása a kereslethez ciklust okoz az egész gazdaságban. Kellő paraméterértékek esetén ciklikusak a szóban forgó változók. (A 7. és a 15. fejezetben nemlineáris dinamikát is tanulmányozunk.)

4.1. Másodrendű lineáris differenciaegyenletek: pozitív diszkrimináns

Több alkalmazásban is szükségünk lesz az elsőrendű (állandó együtthatós) lineáris differenciaegyenlet továbbfejlesztésére, amelyet *másodrendűnek* nevezünk ($A_2 \neq 0$):

$$x_{t+1} = A_1 x_t + A_2 x_{t-1} + B, \qquad t = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.1}$$

ahol x_0 és x_{-1} kezdeti állapotpár, valamint A_1, A_2, B együttható adott. Itt az új állapot az előző két állapottól függ. A címben szereplő pozitív diszkrimináns jelentése hamar érthetővé válik.

Az egyensúlyi állapot ismét könnyen meghatározható:

$$x^o = A_1 x^o + A_2 x^o + B, \tag{4.1°}$$

azaz

$$x^o = \frac{B}{1 - A_1 - A_2}, \tag{4.2}$$

feltéve, hogy $A_1 + A_2 \neq 1$. (A kizárt esetben általában nincs egyensúly, kivéve a $B = 0$ esetet, amikor minden állapot egyensúly – amelyet egy kétszeres kezdőállapot határoz meg.) Ismét bevezetve az $\hat{x}_t = x_t - x^o$ eltérésváltozókat, ezek már egy másodrendű homogén lineáris differenciaegyenletet elégítenek ki:

$$\hat{x}_{t+1} = A_1 \hat{x}_t + A_2 \hat{x}_{t-1}, \qquad t = 0, 1, 2, \dots, \quad \hat{x}_0, \hat{x}_{-1} \quad \text{adott.} \tag{4.3}$$

Az elsőrendű egyenlethez hasonlóan most is mértani sorozat alakjában keressük a megoldást: $\hat{x}_t = \xi \lambda^t$, ahol $\xi \neq 0$ és $\lambda \neq 0$ valós számok. Behelyettesítjük a feltételezett megoldást a (4.3) homogén lineáris egyenletbe:

$$\xi \lambda^{t+1} = A_1 \xi \lambda^t + A_2 \xi \lambda^{t-1}.$$

$\xi\lambda^{t-1}$-nel osztva,

$$\lambda^2 = A_1\lambda + A_2, \qquad \text{azaz} \qquad p(\lambda) = \lambda^2 - A_1\lambda - A_2 = 0 \tag{4.4}$$

másodfokú, ún. *karakterisztikus egyenlethez* jutunk. (Mivel $A_2 \neq 0$, ezért $\lambda \neq 0$!) Egyelőre feltesszük, hogy $D^2 = A_1^2 + 4A_2 > 0$, azaz a diszkrimináns pozitív. Ekkor a (4.4) egyenletnek két különböző valós gyöke van (1: +, 2: –):

$$\lambda_{1,2} = \frac{A_1 \pm \sqrt{A_1^2 + 4A_2}}{2}.$$

Előkészítésként a 4.1. táblázatban három pályát mutatunk be, amelyek azonos kezdőpontpárból indulnak ($x_{-1} = 0{,}6$; $x_0 = -0{,}9$), de három együtthatóhármas adja őket ($B = 0$): az 1. oszcillálva robban ($A_1 = -0{,}5$, $A_2 = 1$), a 2. csillapítás nélkül ciklizál ($A_1 = 0$, $A_2 = 1$) és a 3. oszcillációmentesen stabil ($A_1 = 0{,}5$, $A_2 = 0{,}1$).

4.1. táblázat. Háromféle pálya

Időszak t	Instabil oszcilláció $x_t(1)$	2-ciklus $x_t(2)$	Stabil, oszcillációmentes $x_t(3)$
–1	0,600	0,600	0,600
0	–0,900	–0,900	–0,900
1	1,050	0,600	–0,390
2	–1,425	–0,900	–0,285
3	1,762	0,600	–0,181
4	–2,306	–0,900	–0,119
5	2,916	0,600	–0,078
6	–3,764	–0,900	–0,051
7	4,798	0,600	–0,033
8	–6,163	–0,900	–0,022

Először két speciális kezdeti állapotpárra mutatunk be egy-egy elfajult megoldást, s ez a negatív diszkriminánsnál is hasznos lesz.

4.1. példa. Ha a két kezdeti állapotra igaz, hogy $\hat{x}_0 = \lambda_1\hat{x}_{-1}$ vagy $\hat{x}_0 = \lambda_2\hat{x}_{-1}$, akkor a megoldás $\hat{x}_t = \lambda_1^t\hat{x}_0$ vagy $\hat{x}_t = \lambda_2^t\hat{x}_0$.

Általános kezdeti állapotpár esetén a fenti elfajult megoldások lineáris kombinációjaként adódik a megoldás.

4.1. tétel. *a) Pozitív diszkrimináns mellett a (4.1) másodrendű lineáris differencia-egyenlet általános (kezdeti értéktől független) megoldása*

$$\hat{x}_t = \xi_1\lambda_1^t + \xi_2\lambda_2^t \tag{4.5}$$

alakú, ahol ξ_1 és ξ_2 tetszőleges valós számpár. b) Adott kezdeti feltételek mellett a (ξ_1, ξ_2) együtthatópár egyértelműen meghatározható a következő lineáris egyenletrendszerből:

$$\hat{x}_0 = \xi_1 + \xi_2 \qquad \text{és} \qquad \hat{x}_{-1} = \xi_1\lambda_1^{-1} + \xi_2\lambda_2^{-1}. \tag{4.6}$$

Bizonyítás. *a)* Mivel (4.4) értelmében a λ_1^t és a λ_2^t megoldás kielégíti a (4.3) rekurziót, ezért tetszőleges lineáris kombinációjuk is kielégíti. Valóban, behelyettesítve (4.3) bal, illetve jobb oldalába a (4.5) kombinációt $t+1$-re, illetve t-re és $t-1$-re,

$$\xi_1\lambda_1^{t+1} + \xi_2\lambda_2^{t+1} = A_1[\xi_1\lambda_1^t + \xi_2\lambda_2^t] + A_2[\xi_1\lambda_1^{t-1} + \xi_2\lambda_2^{t-1}], \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Az egyenlet a ξ_1 és a ξ_2 együtthatós tagokra (4.4) miatt egyenként is áll.

b) Konstrukciója miatt a választott együtthatójú kombináció kielégíti a két kezdeti feltételt. A probléma természetéből adódik, hogy más megoldás nincs. □

A megoldás zárt alakú felírása önmagában is érdekes, de még érdekesebb, hogy segítségével megadható a stabilitás és az oszcillációmentesség aszimptotikus feltétele is. (A rendszert *aszimptotikusan oszcillációmentesnek* nevezzük, ha hosszabb távon az eltérésváltozó nem vált előjelet.) Az abszolút értékben nagyobb, ún. *domináns* gyökből indulunk ki, amely A_1 előjelétől függően λ_1 $(A_1 > 0)$ és λ_2 $(A_1 < 0)$, a hosszú távon domináns tag pedig $\xi_1\lambda_1^t$, illetve $\xi_2\lambda_2^t$; az atipikus $A_1 = 0$ esetén a két gyök abszolút értékben azonos, a megoldás 2-periódusú rezgés (a 4.1. táblázat 2. pályája): $x_{2t-1} = A_2^t x_{-1}$ és $x_{2t} = A_2^t x_0$.

4.2. tétel. *a) Pozitív diszkrimináns mellett a (4.1) másodrendű lineáris differenciaegyenlet egyensúlya pontosan akkor aszimptotikusan stabil, ha*

$$|A_2| < 1 \qquad \textit{és} \qquad A_2 - 1 < A_1 < 1 - A_2.$$

b) A pálya aszimptotikusan pontosan akkor oszcillációmentes, ha

$$A_1 > 0.$$

Megjegyzés. Az *a)* és *b)* esetszétválasztás nem teljes, például szándékosan kimaradt a stabil, de aszimptotikusan nem stabil rendszer és a rövid távon is oszcillációmentes rendszer.

Bizonyítás. *a)* Szükségesség. Ha a rendszer aszimptotikusan stabil, akkor (4.5) szerint mindkét gyök kisebb, mint 1: $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$. Ahelyett, hogy a másodfokú egyenlet megoldóképletét behelyettesítenénk az egyenlőtlenségbe, először a gyökök és együtthatók közti második egyenlőséget alkalmazzuk: $-A_2 = \lambda_1\lambda_2$ miatt $|A_2| < 1$ teljesül. Stabilitás esetén a (4.4)-beli $p(\lambda)$ polinom –1-ben és +1-ben is pozitív, azaz

$$1 + A_1 - A_2 > 0 \qquad \text{és} \qquad 1 - A_1 - A_2 > 0,$$

azaz *a)* áll. Az elégségesség hasonlóan igazolható.

b) (4.5) szerint a rendszer aszimptotikusan oszcillációmentes, ha $|\lambda_2| < \lambda_1$. A gyökök és együtthatók közti első egyenlőséget alkalmazva, $0 < \lambda_1 + \lambda_2 = A_1$. □

4.2. példa. Anélkül, hogy ismerte volna a fogalmat, másodrendű lineáris differenciaegyenletet először a Fibonacci néven szereplő Leonardo pisai matematikus vizsgált 1202-ben: $F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$, $F_1 = 1 = F_0$, de ő még nem és sokáig más sem tudta a megoldást zárt alakban előállítani. Szerencsére 1740 körül a nagy Euler talált egy viszonylag egyszerű módszert az ún. *n-ed rendű homogén lineáris rekurzió* megoldására, ezt ismertettük a másodrendű esetben – a konkrét képlet Binet nevét viseli. Ez a másodrendű lineáris rekurzió a természetben és művészetben is fontos szerepet játszik.

A megoldás a $\lambda^2 = \lambda + 1$ karakterisztikus egyenlet

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

gyökpárján keresztül vezet F_t (4.5)-beli zárt alakjához. Figyeljük meg, hogy egy természetes számokra vonatkozó feladat megoldásához ki kellett lépnünk az irracionális számkörbe! Egyébként F_{t+1}/F_t tart az aranymetszéshez, 1,618...-hoz.

Feladatként tűzzük ki a 2.2. tétel általánosítását a másodrendű rendszerre.

4.1. feladat. Mutassuk meg $D^2 > 0$ esetén, hogy ha a (4.1) másodrendű lineáris rendszer pályái korlátosak, akkor két közeli kezdeti állapotból induló pálya az idők végezetéig közel marad egymáshoz!

A közgazdasági modellek világába vezet át a

4.2. feladat. Általánosítva a (2.7) egyenletet, tegyük föl, hogy minden időszakban a tőkenövekedés két részből adódik: az új beruházások ψ és az előző időszaki beruházások $1-\psi$-részét helyezik üzembe, ahol $0 \le \psi \le 1$:

$$K_t = K_{t-1} + \psi I_t + (1-\psi) I_{t-1}, \qquad t = 1, 2, \ldots.$$

Minél nagyobb a ψ értéke, annál gyorsabb a beruházások üzembe helyezése.

a) Bizonyítsuk be, hogy egyenletünk a (2.7) másodrendű homogén lineáris differenciaegyenlet speciális esete, pozitív diszkriminánssal! (Ez a kivételes $B = 0$, $A_1 + A_2 = 1$ eset.)

b) Milyen (K_0, K_{-1}) kezdőértékpárokra lesz a K_t/K_{t-1} sorozat állandó (egyensúlyi növekedés)?

c) Igazoljuk, hogy a tetszőleges (K_0, K_{-1}) kezdőértékpár esetén a pálya tart az egyensúlyi pályához!

d) Mutassuk meg, hogy a *b)*-beli egyensúlyi növekedési ütem ψ növekvő függvénye!

A pozitív után külön kell vizsgálni nempozitív diszkrimináns esetét.

4.2. Nempozitív diszkrimináns

Kezdjük a negatív diszkriminánssal: $A_1^2 < -4A_2$ esetén trigonometrikus alakban adódik a megoldás. De mindenekelőtt célszerű lesz bevezetni a következő definíciót.

Legyen P egy természetes szám. Egy $(x_0, x_1, \ldots)$ sorozatot P-*ciklusnak* nevezünk, ha P időszakonként ismétlődik, de rövidebb szakaszra nem:

$$x_{kP+r} = x_r, \qquad r = 0, 1, \ldots, P-1, \qquad k = 1, 2 \ldots.$$

Azaz P a legkisebb ilyen szám – a *periódus*. Megjegyezzük, hogy a $P = 1$ eset elfajult ciklus, hiszen a sorozat minden tagja azonos: $x_1 = x_2 = \cdots$ (egyensúly).

Bemelegítésül bemutatjuk a két legegyszerűbb ilyen esetet.

4.3. példa. 4-fázisú inga: $x_{t+1} = -x_{t-1}$, $x_0 = 1$, $x_{-1} = 0$. Helyettesítéssel belátható, hogy az állapotsorozat $1, 0, -1, 0, \ldots$, tehát 4-ciklus.

4.3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $x_{t+1} = x_t - x_{t-1}$ másodrendű differenciaegyenlet bármely kezdeti érték melletti megoldása 6-ciklus! Vegyük észre, hogy az $(1, 1, 0, -1, -1, 0)$ sorozat a cikluson belüli ismétlődés ellenére is 6-ciklus.

Két lépésben kimondjuk az általános tételt, amely a fizikából ismert rezgést írja le, ahol a kilengés maximuma nemcsak állandó, de időben növekvő vagy csökkenő is lehet; emellett a rendszer induló állapota lehet kisebb, mint a maximum, periódusa tipikusan nem egész.

Először feltesszük, hogy kilengés maximuma állandó, emellett a rendszer induló állapota maximális. Ekkor a ciklikus pályát a diszkrét idő ellenére alkalmas folytonos periodikus időfüggvény egész értékű pontokban vett helyettesítési értékeként keressük:

$$\hat{x}_t = \hat{x}_0 \cos \varphi t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.7}$$

s az általánosított periódus az $\hat{x}_0 \cos \varphi t = \hat{x}_0 \cos \varphi(t+P)$ egyenlet legkisebb pozitív megoldása:

$$P = \frac{2\pi}{\varphi}. \tag{4.8}$$

Fizikában a $\varphi > 0$ paramétert *szögsebességnek* nevezik, hiszen ez mutatja, hogy a polárkoordináta-rendszerben a $(\cos \varphi t, \sin \varphi t)$ pontot az origóval összekötő sugár egységnyi idő alatt milyen szögben fordul el. Közelítőleg a Föld a Nap körüli pályáján napi 1^{o}-ot halad.

A (4.8)-beli periódus hossza általában nem természetes szám, ekkor nem beszélhetünk szigorú ciklusról. Ha $P > 1$ racionális szám, például egyszerűsített alakban p/q, akkor q körforgás után $x_p = x_0$, és onnan ismétlődik a pálya. Emiatt van szükség a szökőévek bonyolult rendszerére. (Például Julius Caesar i.e. 45-ben minden negyedik évet szökőévnek nyilvánított, és ezekben az években a 365 naphoz hozzátett egy 366.-at. Vajon időszámításunk 525. évi bevezetésekor már tudták-e a szökőévek helyét?) Ha azonban P irracionális szám, akkor szigorúan véve sohasem tér vissza a rendszer az eredeti állapotába. (Valami ilyesmi okozta, hogy 1582-ben Gergely pápának módosítani kellett ezt a naptárrendszert is, és kihúzni a szökőévekből a 100-zal oszthatókat, és visszatenni a 400-zal oszthatókat.)

A továbbiakban a (4.3) másodrendű homogén lineáris differenciaegyenlettel származtatjuk a periodikus megoldásokat.

4.3. tétel. *Negatív diszkrimináns esetén a (4.3) rendszer minden $\hat{x}_0 \neq 0$ kezdőfeltétele melletti megoldása pontosan akkor (4.7) alakú, ha*

$$A_2 = -1, \qquad \textit{azaz} \qquad |A_1| < 2 \tag{4.9}$$

és

$$\hat{x}_{-1} = \frac{A_1}{2}\hat{x}_0. \tag{4.10}$$

b) A φ szögsebességet

$$\cos \varphi = \frac{A_1}{2} \in (-1, 1) \tag{4.11}$$

határozza meg.

Megjegyzések. 1. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az $A_1^2 < -4A_2 = 4$ feltétel szükséges és elegendő ahhoz, hogy a (4.11) implicit egyenletnek legyen pozitív φ megoldása.

2. Kiemeljük, hogy a másik ciklusfeltétel milyen egyszerű: $A_2 = -1$. Ez egy elemi megfontolásból is következik: ha minden pálya ciklikus, akkor időben megfordítható. (Ilyenek a mechanikai mozgások, de már időben a hőtani folyamatok is megfordíthatatlanok, nem szólva a biológiai és a társadalmi folyamatokról.) Ez viszont azt jelenti, hogy ha a (4.3) egyenletet időben visszafelé oldjuk meg, ugyanazt a pályát kapjuk:

$$x_{t-1} = A_2^{-1}A_1x_t - A_2^{-1}x_{t+1}, \qquad t = 0, -1, -2, \ldots, \tag{4.3'}$$

A két egyenlet pontosan akkor ekvivalens, ha teljesül (4.9a).

3. A_1 szerepe is jól látható; minél nagyobb A_1 algebrailag, annál hosszabb a periódus: $A_1 = -1$-re $P = 3$, $A_1 = 0$-ra $P = 4$ (4.3. példa), $A_1 = 1$-re $P = 6$ (4.2. feladat). A függés azonban erősen nemlineáris!

4. Lineáris ciklusmodellünknek két gyengéje van: *1)* a kilengés maximuma a kezdőértéktől függ, *2)* a ciklus feltétele pengeélen táncol: $|A_2| < 1$ esetén (például a súrlódásos

ingánál) az állapot tart a 0-hoz, $|A_2| > 1$ esetén az állapot periódusonkénti maximális abszolút értéke tart a végtelenhez. Ezek a gyengeségek csak nemlineáris modellekben kezelhetők.

Bizonyítás. Behelyettesítjük a feltételezett (4.7) megoldást a (4.3) másodrendű homogén lineáris differenciaegyenletbe:

$$\hat{x}_0 \cos(\varphi t + \varphi) = A_1 \hat{x}_0 \cos \varphi t + A_2 \hat{x}_0 \cos(\varphi t - \varphi).$$

Elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát $\hat{x}_0 \neq 0$-val, és alkalmazzuk a koszinuszfüggvény addíciós képletét:

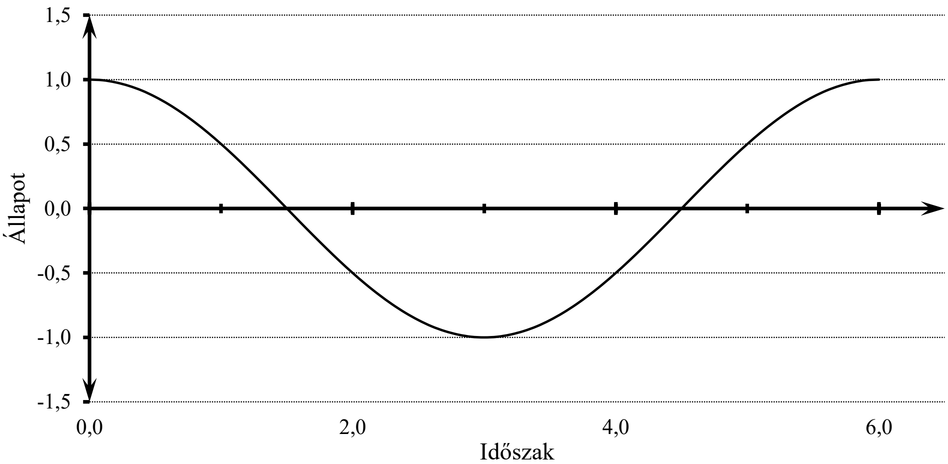
$$\cos \varphi t \cos \varphi - \sin \varphi t \sin \varphi = A_1 \cos \varphi t + A_2(\cos \varphi t \cos \varphi + \sin \varphi t \sin \varphi).$$

Két részre bontjuk az egyenletet, és mindkét részre megköveteljük az egyenlőséget. (Belátható, hogy ez nemcsak elégséges, de szükséges is.) A $\sin \varphi t$ együtthatóinak egyenlősége $-1 = A_2$. A $\cos \varphi t$ együtthatóinak egyenlősége $\cos \varphi = A_1 + A_2 \cos \varphi$, s ez (4.9)-cel együtt (4.11)-gyel ekvivalens.

A kezdőértékekre vonatkozó (4.10) feltétel egyszerűen adódik abból, hogy (4.7) értelmében $\hat{x}_1 = \hat{x}_{-1}$, s ezt behelyettesítve (4.3)-ba: $\hat{x}_{-1} = A_1 \hat{x}_0 - \hat{x}_{-1}$, azaz (4.10). □

A 4.3. tételt szemlélteti a 4.1. ábra: $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, $x_0 = 1$ és $x_{-1} = 1/2$ kezdőállapottal, folytonos időskálán bemutatva.

4.1. ábra. Ciklus, $n = 2$



Rátérünk a bonyolultabb esetre, ahol a maximális kilengés időben változhat, és az első ciklus kezdőértéke tipikusan kisebb, mint a maximum; megjelenik a fizikában csillapítási tényezőnek és fázisszögnek nevezett (a, δ) paraméterpár. (A *csillapítási tényező* szemléletesen azt mondja meg, hogy az egymást követő maximumok aránya mekkora. A *fázisszög* a kezdés és a maximum különbségét méri: például esztétikai okokból szerencsésebb lenne az új évet január 1-je helyett december 21-én, a téli napfordulón kezdeni.) Ilyenkor nem ciklusról, hanem *harmonikus oszcillációról, rezgésről* kell beszélnünk, ahol a folytonosított idejű pályák nem térnek vissza önmagukba, de azonos P periódusonként váltanak előjelet.

4.4. tétel. *a) Ha $A_1^2 < -4A_2$ (tehát $A_2 < 0$), akkor (4.3) pályája*

$$\hat{x}_t = ra^t \cos(\varphi t + \delta), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.12}$$

alakú, ahol a csillapítási együttható

$$a = \sqrt{-A_2} \tag{4.13}$$

és a szögsebesség

$$\cos\varphi = \frac{A_1}{2\sqrt{-A_2}} \in (-1, 1). \tag{4.14}$$

b) A további paraméterek (r amplitúdó és δ fázisszög) a kezdeti feltételekből adódnak:

$$\hat{x}_0 = r\cos\delta \qquad \textit{és} \qquad \hat{x}_{-1} = ra^{-1}\cos(\delta - \varphi). \tag{4.15}$$

Megjegyzések. *a)* Könnyen belátható, hogy (4.9)–(4.10) esetén a 4.4. tétel a 4.3. tételre egyszerűsödik.

b) Ha a rendszer felrobban: $a > 1$, akkor a lineáris közelítés általában érvényét veszti.

c)* Külön meggondolást igényel, hogy a nemlineáris (4.15) egyenletrendszernek mindig van (r, δ) megoldása. (4.15) második egyenletét elosztva az elsővel, és a koszinusz addíciós képletét alkalmazva:

$$\frac{\hat{x}_{-1}}{\hat{x}_0} = a\frac{\cos\delta\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta} = a(\cos\varphi + \tan\delta\sin\varphi),$$

ahonnan adódik δ (itt cot a ctg-t jelöli):

$$\tan\delta = \frac{\hat{x}_{-1}}{a\hat{x}_0\sin\varphi} - a^{-1}\cot\varphi.$$

d)* Aki ismeri a komplex számokat, az felismerheti, hogy a (4.12) megoldás a 4.4. tétel kiterjesztése komplex számokra. Sőt, így lehet rájönni a képletre.

Bizonyítás. Bevezetjük a $\psi_t = \varphi t + \delta$ jelölést és behelyettesítjük a feltételezett (4.12) megoldást a (4.3) másodrendű homogén lineáris differenciaegyenletbe:

$$ra^{t+1}\cos(\psi_t + \varphi) = A_1ra^t\cos\psi_t + A_2ra^{t-1}\cos(\psi_t - \varphi).$$

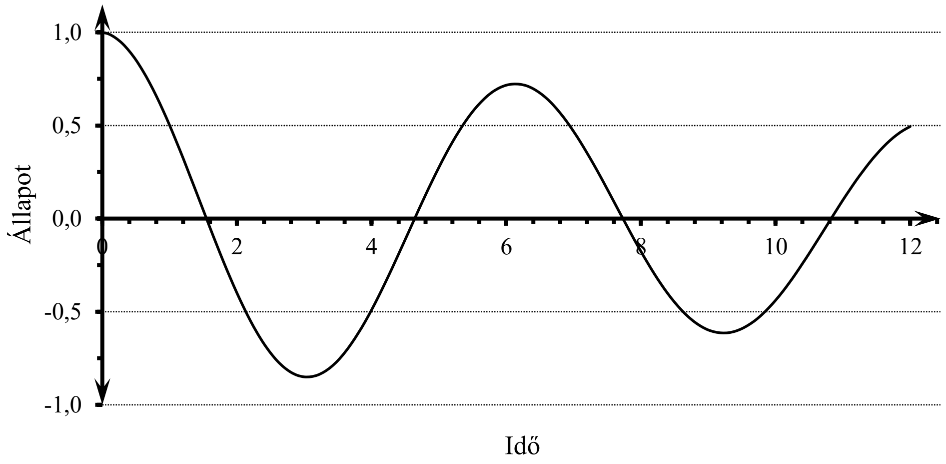
Elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát ra^{t-1}-nel, és alkalmazzuk a koszinuszfüggvény addíciós képletét:

$$a^2(\cos\psi_t\cos\varphi - \sin\psi_t\sin\varphi) = A_1a\cos\psi_t + A_2(\cos\psi_t\cos\varphi + \sin\psi_t\sin\varphi).$$

Két részre bontjuk az egyenletet, és mindkét részre megköveteljük az egyenlőséget. (Belátható, hogy ez nemcsak elégséges, de szükséges is.) A $\sin\psi_t$ együtthatója két oldalon: $-a^2\sin\varphi = A_2\sin\varphi$, amely teljesül (4.13) miatt. A $\cos\psi_t$ együtthatója a két oldalon: $a^2\cos\varphi = A_1a + A_2\cos\varphi$, amely teljesül (4.14) miatt. □

A 4.4. tételt szemlélteti a 4.2. ábra: $A_1 = 1$, $A_2 = -0{,}9$ és a megfelelő kezdeti feltételek, újból folytonos időben ábrázolva.

4.2. ábra. Csillapított oszcilláció, $n = 2$



Most a 4.2. táblázatban a differenciaegyenlet együtthatóinak függvényében osztályozzuk a másodrendű lineáris differenciaegyenlet legfontosabb megoldási típusait, a pozitív diszkrimináns esetében mindhárom alesetre vonatkozik az aszimptotikus jelző.

4.2. táblázat. Legfontosabb megoldási típusok osztályozása

Diszkrimináns	Együtthatók	Tulajdonságok
$A_1^2 + 4A_2 > 0$		(aszimptotikusan)
	$\lvert A_2\rvert < 1, \quad A_2 - 1 < A_1 < 1 - A_2$	stabil
	$A_1 > 0$	oszcillációmentes
	$A_1 \le 0$	oszcilláló
$A_1^2 + 4A_2 < 0$		periodikus
	$-1 < A_2 < 0$	aszimptotikusan stabil
	$A_2 = -1$	ciklikus ($P > 2$)

Az alfejezet végére marad az elfajult (atipikus) 3. eset, amelyet csak példaként taglalunk.

4.4. példa. $A_1^2 = -4A_2 \neq 0$ esetén $\lambda = \lambda_{1,2} = A_1/2$, és (4.5) helyett keresünk a mértani sorozattól független másik megoldást (amely nem skalárszorosa λ^t-nek), $t\lambda^t$-t:

$$\hat{x}_t = \xi_1 \lambda^t + \xi_2 t \lambda^t \tag{4.4*}$$

kombinációval kísérletezünk (minden t-re). Ellenőrzésként behelyettesítünk (4.3)-ba, és egyszerűsítve λ^{t-2}-nal, adódik az új karakterisztikus egyenlet:

$$[\xi_1 + \xi_2(t+1)]\lambda^2 = A_1\lambda[\xi_1 + \xi_2 t] + A_2[\xi_1 + \xi_2(t-1)].$$

Az A_1, A_2 együtthatók kapcsolata miatt mind a ξ_1, mind a ξ_2 együtthatós tagokra áll az egyenlőség, tehát jó volt a (4.5*) ötlet. A kezdeti feltételből egyszerűen

$$\hat{x}_0 = \xi_1 \qquad \text{és} \qquad \hat{x}_{-1} = (\xi_1 - \xi_2)/\lambda, \qquad \text{azaz} \qquad \xi_2 = \hat{x}_0 - \frac{A_1}{2}\hat{x}_{-1}.$$

4.3. Többváltozós dinamika

Ebben az alfejezetben a 2. fejezet fontos általánosításával, az elsőrendű *többváltozós* lineáris differenciaegyenletekkel foglalkozunk, de csak két speciális esettel. Először felírjuk az általános *kétváltozós* esetet:

$$x_{t+1} = ax_t + by_t \qquad \text{és} \qquad y_{t+1} = cx_t + dy_t.$$

Megmutatjuk, hogy a homogén másodrendű differenciaegyenlet is felírható ilyen alakban, ha bevezetjük az $y_t = x_{t-1}$ jelölést. Valóban,

$$x_{t+1} = A_1 x_t + A_2 x_{t-1}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.1°}$$

ekvivalens a következő kétváltozós rendszerrel:

$$x_{t+1} = A_1 x_t + A_2 y_t, \qquad \text{és} \qquad y_{t+1} = x_t,$$

azaz

$$a = A_1, \quad b = A_2, \qquad \text{és} \qquad c = 1, \quad d = 0.$$

Rátérünk egy konkrét *n-változós* egyenletrendszerre, de az egyszerűség kedvéért nem hagyományos $t \to t+1$ alakban írjuk föl, és a középiskolai szintet meghaladó explicit megoldást is kihagyjuk, viszont elemileg igazoljuk a stabilitást.

Legyen $n > 1$ természetes szám, és $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ n db valós szám az egységintervallumon. Jelölési okokból legyen $x_0 = 0$ és $x_{n+1} = 1$. Tekintsük a következő transzformációt:

$$x'_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ahol $x'_0 = 0$ és $x'_{n+1} = 1$. Minden nagy lépésen belül egyszerre elvégzünk n kislépést.

Kérdés: ha sokszor megismételjük a transzformációt, hová tartanak a pontok? Belátjuk, hogy az x_i pont az $x_i^\circ = i/(n+1)$ osztóponthoz tart.

Szemléletesen: egy 100 m hosszú intervallumon véletlen pontokban áll n ember. Megjelöljük a helyüket, majd egy lépésben mindegyik ember bal és jobb oldali szomszédhelyének a felezőpontjába lép. Hová tart a folyamat?

A bizonyítás során a szomszédos pontok távolságát, illetve maximumukat vizsgáljuk. Legyen $d_i = x_i - x_{i-1}$, illetve $d'_i = x'_i - x'_{i-1}$. Belátjuk, hogy a maximum a transzformációval csökken vagy állandó marad:

$$\max_i d'_i \le \max_i d_i.$$

Ezt igazolandó, helyettesítsük be x'_i-t d'_i-be:

$$d'_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2} - \frac{x_{i-2} + x_i}{2} = \frac{x_{i+1} - x_i + x_{i-1} - x_{i-2}}{2} = \frac{d_{i-1} + d_{i+1}}{2}.$$

Maximumot véve adódik az egyenlőtlenség. Az is látható, hogy egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha két majdnem szomszédos távolság egyaránt maximális volt:

$$d_{i_0-1} = d_{i_0+1} = \max_i d_i$$

Ha a következő pontban is megismétlődne az egyenlőtlenség, akkor már 4 maximális kezdőtávolság lenne egyenlő, és ez egy idő után teljes egyenlőséget jelent.

A 4.3. táblázatban önkényesen választott kezdőnégyesre numerikusan szemléltetjük a folyamatot. A konvergencia (az aszimptotikus közelítés) nem monoton, de elfogadható sebességű.

4.3. táblázat. Az egyidejű helyváltoztatás konvergenciája

Idő	Állapotok			
t	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0,150	0,310	0,550	0,850
1	0,155	0,350	0,580	0,775
2	0,175	0,368	0,563	0,790
3	0,184	0,369	0,579	0,781
4	0,184	0,381	0,575	0,789
5	0,191	0,380	0,585	0,788
6	0,190	0,388	0,584	0,793
7	0,194	0,387	0,590	0,792
8	0,193	0,392	0,589	0,795
9	0,196	0,391	0,594	0,795
10	0,196	0,395	0,593	0,797

Érdemes úgy módosítani a transzformációt, hogy minden nagylépés i-edik kislépésében már az előző kislépésben kiszámított friss bal oldali hellyel számolunk:

$$x'_i = \frac{x'_{i-1} + x_{i+1}}{2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ahol $x'_0 = 0$ és $x'_{n+1} = 1$. Kérdés: ha sokszor megismételjük a nagy lépést (a transzformációt), hová tartanak a pontok?

Szemléletesen: most minden ciklusban balról jobbra haladva egymás után foglalják el az emberek két szomszédjuk közti felezőpontot, s amikor a kislépések befejeződnek, újra kezdődik a nagylépés. Mi lesz a folyamat végén? Ugyanaz, mint az első esetben.

Ezt az esetet egyszerűbb elemezni, mert minden kislépésben az érintett szomszédok maximális távolsága csökken, kivételes esetben változatlan marad. Valóban, a számtani közép tulajdonsága miatt az i-edik pont távolsága bal (és jobb) oldali szomszédjától fele lesz az i-edik pont két szomszédja közti távolságnak, amely általában kisebb, mint a kislépés előtti nagyobb távolság (de legfeljebb egyenlő vele).

A 4.4. táblázatban numerikusan szemléltetjük a frissített folyamatot. A konvergencia majdnem monoton, és gyorsabb, mint az előző.

4.4. táblázat. A frissített folyamat konvergenciája

Idő	Állapotok			
t	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0,150	0,310	0,550	0,850
1	0,155	0,353	0,601	0,801
2	0,176	0,389	0,595	0,797
3	0,194	0,395	0,596	0,798
4	0,197	0,397	0,597	0,799
5	0,198	0,398	0,598	0,799

4.4. Beruházási ciklusok

A bibliai József hét kövér esztendejét követő hét szűk esztendeje 14-éves gazdasági ciklust jelent, és a ciklusok a modern gazdaságban is megmaradtak. Mivel a GDP-n belül a beruházás kisebb és változékonyabb, mint a fogyasztás, ezért ezeket a ciklusokat gyakran a beruházások ciklikus mozgása okozza. A Nobel-díjas brit közgazdász, Hicks (1950) beruházási ciklusmodellje történetileg az egyik legérdekesebb és leghasznosabb közgazdasági modell. Módszertani szempontból az adja az érdekességét, hogy mindössze két független változóval képes a gazdaság ciklusait modellezni. A lineáris mag csak előkészítés, a teljes modellt a nemlineáris burok adja (7.3. alfejezet). Makroökonómiában megszokott módon változatlan áras értékekkel dolgozunk, és itt eltekintünk a hosszú távú növekedéstől. Hasznos megkülönböztetni a beruházásokat a fogyasztástól: az előbbi csak közvetve segíti az utóbbit. Legyen Y_t a *termelés* (GDP), I_t a *beruházás* és C_t a *fogyasztás* volumene a t-edik időszakban. Zárt gazdaságot feltételezünk, ahol nincs se export, se import.

Zárt gazdaságban a három változó között egy azonosság áll fenn;
GDP azonosság: termelés = beruházás + fogyasztás, azaz teljesül

$$Y_t = I_t + C_t. \tag{4.16}$$

Clark 1917-ben vezette be a *beruházási akcelerátort* (gyorsítót), amely szerint minden időszakban az indukált beruházás arányos a következő időszakra várt termelésváltozásával: $\beta(Y_{t+1} - Y_t)$, $\beta > 0$. Előretekintő helyett visszatekintő várakozást feltételezve, az indukált beruházást az előző időszak termelésváltozásával vesszük arányosnak: $\beta(Y^{\mathrm{e}}_{t-1} - Y^{\mathrm{e}}_{t-2})$. A szóban forgó egyenletet Hicks kiegészítette az *autonóm beruházással*, amely független a gazdaság helyzetétől: I^{A}. Például a gazdaság időleges növekedése beruházást igényel, de az esedékes útfelújításokat a válságban is végre kell hajtani.
Lineáris beruházási függvény

$$I_t = I^{\mathrm{A}} + \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}). \tag{4.17}$$

Keynes (1936) óta a fogyasztást gyakran az előző időszaki jövedelem (azaz termelés) lineáris függvényeként írják le: γY_{t-1}, ahol a γ *fogyasztási határhajlandóság* mutatja, hogy a fogyasztás milyen mértékben követi az előző időszaki jövedelmet, $0 < \gamma < 1$; és $\mu = 1/(1-\gamma)$ a híres *multiplikátor*. (Keynes volt az a vezető közgazdász, aki a Nagy Válság idején bátran és meggyőzően érvelt amellett, hogy tömeges munkanélküliség esetén minden állami kiadás megtöbbszörözi, μ-szörösére növeli a kibocsátást – a költségvetési hiány majd megszűnik.) Ezt még egy C^{A} autonóm taggal módosítjuk.
Lineáris fogyasztási függvény

$$C_t = C^{\mathrm{A}} + \gamma Y_{t-1}, \tag{4.18}$$

Adott I^{A}, C^{A}, β és γ együttható, valamint adott Y_{-1}, Y_0 kezdeti érték mellett az (I_t), (C_t) és (Y_t) pályát (4.16)–(4.18) egyértelműen meghatározza.

Három egyenletünk van, három változóval. Érdemes azonban megszabadulni a nélkülözhető változóktól és egyenletektől. A szokatlan alakú differenciaegyenlet-rendszert szokásos alakra hozzuk: egy másodrendű egyváltozós differenciaegyenletre, ha behelyettesítjük (4.17)-et és (4.18)-at (4.16)-ba.
Az alapegyenlet-rendszer:

$$Y_t = I^{\mathrm{A}} + C^{\mathrm{A}} + (\beta + \gamma)Y_{t-1} - \beta Y_{t-2}, \qquad t = 0, 1, \ldots, \tag{4.19}$$

ahol Y_{-2} és Y_{-1} adott kezdeti értékek. Az Y_t *alapváltozó* dinamikájának ismeretében a többi változó (I_t és C_t) dinamikája egyszerűen kiszámítható a (4.17) és a (4.18) egyenletből.

Oszcillációról (rezgésről) beszélünk, ha a modell változóinak eltérése az egyensúlyi értéktől szabályos időközökben előjelet vált, de a kilengés nagysága (amplitúdója) változhat.

A 4.1. tétel speciális esete a

4.5. tétel. *A (4.19) hicksi rendszer egyensúlya létezik és egyértelmű:*

$$Y^{\mathrm{o}} = \frac{I^{\mathrm{A}} + C^{\mathrm{A}}}{1-\gamma}, \quad I^{\mathrm{o}} = I^{\mathrm{A}}, \quad C^{\mathrm{o}} = C^{\mathrm{A}} + \gamma Y^{\mathrm{o}}, \qquad \textit{ahol} \qquad 0 < \gamma < 1. \tag{4.20}$$

A 4.4. tétel speciális esete a

4.6. tétel. *a) A (4.19) hicksi rendszer akkor és csak akkor oszcillál, ha*

$$\gamma < 2\sqrt{\beta} - \beta. \tag{4.21}$$

b) A rendszer akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha

$$\beta < 1. \tag{4.22}$$

c) A (4.21)-beli oszcilláció amplitúdója pontosan akkor állandó, azaz a rendszer ciklikus, ha

$$\beta = 1. \tag{4.23}$$

Megjegyzés. (4.23) esetén (4.21) eleve teljesül.

Egy számpéldán mutatunk be egy viszonylag rövid, 8-periódusú pályát. (Vigyázat: másodrendű rendszernél a cikluson belül is ismétlődhet egy-egy állapot, a periódus végét kétszeres ismétlődés jelzi.) A 4.5. tételben szereplő (4.22) alapján $\beta = 1$, $\gamma = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4142$, $I^{\mathrm{A}} = (1-\gamma)/3$, $C^{\mathrm{A}} = 2I^{\mathrm{A}}$: $P = 8$. Ekkor az egyensúlyi pont $Y^{\mathrm{o}} = 1$. Kezdeti feltétel $Y_{-1} = 1$ és $Y_0 = 1{,}02$. Ekkor a 4.5. táblázat tartalmazza az első 10 időszaki eredményt.

4.5. táblázat. A hicksi 8-ciklus

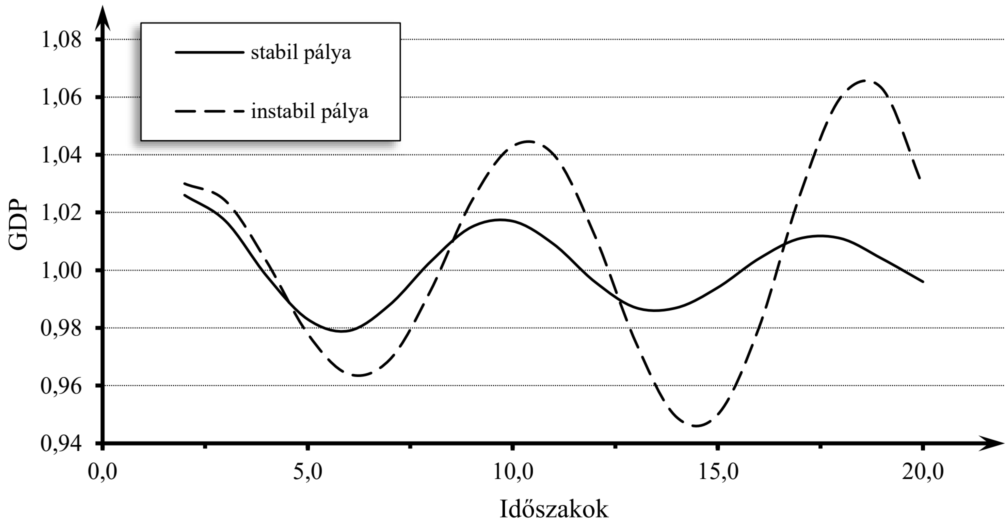
Időszak t	Kibocsátás Y_t	Fogyasztás C_t	Beruházás I_t
–1	1,000		
0	1,020		
1	1,028	0,813	0,215
2	1,020	0,816	0,204
3	1,000	0,813	0,187
4	0,980	0,805	0,175
5	0,972	0,796	0,175
6	0,980	0,793	0,187
7	1,000	0,796	0,204
8	1,020	0,805	0,215
9	1,028	0,813	0,215

Ha reálisabb paraméterértékeket választunk, akkor γ-nak sokkal közelebb kell lennie 1-hez, de ekkor hosszabb lenne a periódus, s ezzel nem foglalkozunk.

A lineáris ciklusmodellek súlyos hibája, hogy nagyon érzékenyek néhány alapparaméter-értékre, és a kilengés értéke a kezdőértéktől függ. Például $\beta = 1$-re ciklus adódik, de $\beta = 0{,}999$-re már stabil oszcilláció, míg $\beta = 1{,}001$-re pedig robbanás – igaz, az első időszakokban alig térve el a ciklustól.

A 4.3. ábra ezt a kétágú villát ábrázolja $\beta = 0{,}9$ és 1,1 esetén.

4.3. ábra. Beruházási ciklus



A 7.3. alfejezet végén majd bemutatjuk a beruházási ciklus nemlineáris általánosítását.

5. Fogyasztói döntések és hasznosságmaximum

A modern közgazdaságtan talán legalapvetőbb kérdése: hogyan döntenek a fogyasztók? Már a 2.3. alfejezetben feltételeztük, hogy minél drágább egy termék, annál kevesebbet vásárolnak belőle a vevők. Az 5.1. alfejezetben heurisztikusan (a józan észre hivatkozva) vezetünk le egy egytermékes keresleti függvényt. Az 5.2. alfejezetben kiterjesztjük a választást két termékre, és kétféle magyarázatot is adunk a fogyasztói magatartásra: egy hüvelykujjszabályt és egy optimalizálót. Az 5.3 és az 5.4. alfejezetben az időbeni választást tárgyaljuk, 2, illetve 3 időszakra.

5.1. Egy egyszerű keresleti függvény

Adott áru iránti *keresleti függvény* minden ár esetén megadja, hogy a fogyasztók összesen hány egységnyi terméket vásárolnak egy adott időszakban a szóban forgó termékből. Ebben az alfejezetben egyetlen, nagy értékű tartós fogyasztási cikk, például a villanyhűtőszekrény piacát mérlegeljük, és azt vizsgáljuk, hogyan döntött az 1960-as évek magyar fogyasztója: vásárol-e vagy nem hűtőszekrényt? Az 1960-as évek említésével kizártuk, hogy a lehetséges vásárlóknak korábban már volt hűtőszekrénye, amelyet csere helyett esetleg meg is javíttathatnak. Lényeges, hogy a termék ára (P pozitív valós szám) akkoriban többhavi átlagjövedelem volt.

Tegyük föl, hogy a több millió magyar háztartást éves jövedelmük (w) szerint a $[0, 1]$ intervallum pontjai képviselik. Legyen a folytonos és monoton növekvő $F(w)$ a jövedelemeloszlásfüggvény, amely megadja, hogy a háztartások hányad részének a jövedelme kisebb, mint w. Természetesen $F(0) = 0$ és $F(1) = 1$. A legegyszerűbb eset az egyenletes eloszlás: $F(w) = w$, de az eloszlás lehet sokkal bonyolultabb is.

Eléggé reális feltevés szerint minden háztartásnak van egy $\mathbf{P}(w)$ *rezervációs* (küszöb) ára: ha az ár kisebb, mint a rezervációs ár, akkor megveszi élete első hűtőszekrényét; ha viszont nagyobb vagy egyenlő, akkor nem. Feltehetjük, hogy minél nagyobb a háztartás jövedelme, annál nagyobb a rezervációs ár: $\mathbf{P}(w)$ monoton növekvő függvény. Jelölje e függvény inverzét $w = \mathbf{P}^{-1}(P)$. Azok veszik meg a hűtőszekrényt, akiknek a jövedelmére teljesül $w > \mathbf{P}^{-1}(P)$. Tehát a termék piaci keresleti függvénye (egységnyi népességre vetítve)

$$D(P) = 1 - F(\mathbf{P}^{-1}(P)).$$

5.1. feladat. Számolja ki a keresleti függvényt, ha a jövedelemeloszlás a $[w_\mathrm{m}, 1]$ szakaszon egyenletes ($0 < w_\mathrm{m} < 1$) és a rezervációsár–jövedelem függvény lineáris: $\mathbf{P}(w) = a + bw$, ($a > 0$, $b > 0$)!

Rugalmasságok

A (2.12) képletben a kereslet az ár lineáris függvénye volt. A valóságban sokkal jobb közelítést ad a hatvány- vagy logaritmikus kapcsolat:

$$D(P) = AP^{\varepsilon}, \qquad \text{vagyis} \qquad \log D(P) = \log A + \varepsilon \log P. \tag{5.1}$$

A kitevőben szereplő $\varepsilon < 0$ paramétert a kereslet előjeles *árrugalmasságának* nevezik.

*A kalkulus segítségével könnyű belátni, hogyha az ár 1%-kal növekszik, akkor az (5.1) szerinti kereslet $|\varepsilon|$%-kal csökken. Valóban,

$$\frac{dD(P)/D(P)}{dP/P} = \frac{\varepsilon AP^{\varepsilon-1}}{AP^{\varepsilon}P^{-1}} = \varepsilon.$$

Érdekes kérdés, hogy miképp változik az ár növekedésével a termékre fordított összkiadás:

$$PD(p) = AP^{P+\varepsilon}.$$

Látható, hogy ha $\varepsilon < -1$, akkor az áremelkedés csökkenti a kiadás, ekkor *árrugalmatlanságról* beszélünk. Hasonlóan, ha $-1 < \varepsilon < 0$, akkor növeli a kiadást, ekkor *árrugalmasságról* beszélünk. ($\varepsilon = -1$ határeset, a kiadás független az ártól.)

E fogalom egyik előnye, hogy független a mértékegységektől. Valóban, ha a keresletet kg helyett grammban, az árat forint helyett fillérben mérjük, akkor (hullámmal jellemezve az új mértékegységekben számított mennyiségeket)

$$D = 1000\tilde{D} \qquad \text{és} \qquad P = 100\tilde{P}.$$

Behelyettesítve az (5.1) hatványfüggvénybe az új mennyiségeket:

$$1000\tilde{D}(P) = A \cdot 100^{\varepsilon}\tilde{P}^{\varepsilon}, \qquad \text{azaz} \qquad \tilde{A} = 0{,}001 \cdot 100^{\varepsilon}A,$$

tehát csak az arányossági együttható változik.

De a fogyasztás nemcsak a P ártól, hanem az M jövedelemtől is függ, általában növekvő függvény. Ekkor a keresleti függvény kétváltozóssá válik:

$$D(P, M) = AP^{\varepsilon}M^{\eta}, \qquad \text{vagyis} \qquad \log D(P, M) = \log A + \varepsilon \log P + \eta \log M.$$

Összehasonlításként a (3.4) keresleti függvényben $\varepsilon = -1$ és $\eta = +1$.

Tanulságos néhány amerikai tapasztalati ár- és jövedelemrugalmasságot közölni az 1970-es évekből. Például az 5.1. táblázat szerint, ha 1%-kal növekedik az étel ára, akkor 2,27%-kal csökken a kereslete, illetve ha 1%-kal emelkedik a fogyasztó jövedelme, akkor 1,61%-kal növekszik a kereslete.

5.1. táblázat. Ár- és jövedelemrugalmasságok, USA, 1970 körül.

Termék	Ár- ε	Jövedelem- η
Étel	–2,27	1,61
Dohány	–0,46	0,21
Lábbeli	–0,91	0,94
Taxi	–0,63	1,14
Saját lakás	–0,41	1,00
Villanyáram	–0,13	0,13

Végül megemlítjük, hogy itt csak rövid távú rugalmasságról beszéltünk. Hosszú távon, ha egyáltalán létezik hosszú táv, más a helyzet: például a dohányzásnál jelentősen emelkedik az árrugalmasság abszolút értéke: $\varepsilon' = -1{,}89$ és a jövedelemrugalmasság: $\eta' = -0{,}86$. Még látványosabb a saját tulajdonú lakás paraméterpárja: $\varepsilon' = -1{,}21$ és $\eta' = 2{,}45$.

5.2. Két termék közti választás

Most az egyén két, egymást helyettesíthető terméket fogyaszt: X és Y, amelyek bármilyen kicsi vagy nagy mennyiségben vásárolhatók. Legegyszerűbb példa az étel és az ital. Egységáruk rendre p és q, valamint a vásárolt mennyiség x és y. Az egyén (havi élelmiszerre költhető) jövedelme m, mind nemnegatív vagy pozitív valós számok. Az egyén az élelemre szánt pénzét ételre és italra költi, ezért érvényes az ún. *költségvetési feltétel,* a két termékre fordított kiadás (egységár $\times$ fogyasztás) összege egyenlő a jövedelemmel:

$$px + qy = m. \tag{5.2}$$

Látható, hogy minél többet vesz az egyén X-ből, annál kevesebbet vehet Y-ból:

$$y = \frac{m - px}{q}, \qquad \text{ahol} \qquad 0 \le x \le \frac{m}{p} \tag{5.3}$$

– ez a költségvetési egyenes. (A magyar nyelvben a költségvetés elsősorban állami vagy önkormányzati költségvetést jelent, míg itt egyéni vagy családi költségvetésről van szó.)

Az egyén gyakran dönt a következő egyszerű, ún. *hüvelykujjszabály* szerint: például jövedelme adott hányadát X-re, a maradékot pedig Y-ra költi; a részarány α és $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$. Képletben:

$$x(p, q, m) = \frac{\alpha m}{p} \qquad \text{és} \qquad y(p, q, m) = \frac{(1 - \alpha)m}{q}. \tag{5.4}$$

Az (5.4) szabály nagyon egyszerű, ezért szívesen alkalmazzuk. De vannak esetek, amikor nem alkalmazható. Például amikor az X áru kereslete Y áru árától is függ: ha a dobozos narancslé ára drágul, akkor növekszik a narancs iránti kereslet. Másik példa – rögzített árak mellett a jövedelem emelkedésével csökken bizonyos termékek iránti kereslet: a jövedelem növekedésével a burgonyát részben a sokkal drágább, de ízletesebb salátával vagy hússal helyettesítjük.

A modern elmélet feltételezi, hogy az egyén az (5.2) költségvetési feltétel mellett egy alkalmas $U(x, y)$ konkáv hasznosságfüggvényt maximalizál. (A kétváltozós függvényt akkor nevezzük konkávnak, ha bármelyik változó tetszőleges rögzítése esetén a kapott egyváltozós függvény konkáv. A konkavitásból következik, hogy ha van lokális maximum, akkor az globális is.) Az 5.1. ábra segítségével grafikusan belátható, hogy a maximális hasznosságot adó (x^*, y^*) pár a sík olyan pontja, amelyben alkalmas c valós számra az $U(x, y) = c$ *szintvonalat* – közömbösségi görbét – éppen érinti az (5.3) költségvetési egyenes. (Egyébként a közömbösségi görbe önmagában is értelmezhető – hasznosságfüggvény nélkül. A domborzati térképről ismert magassági szintvonalak olyan pontok mértani helye, ahol a tengerszint feletti magasság adott.)

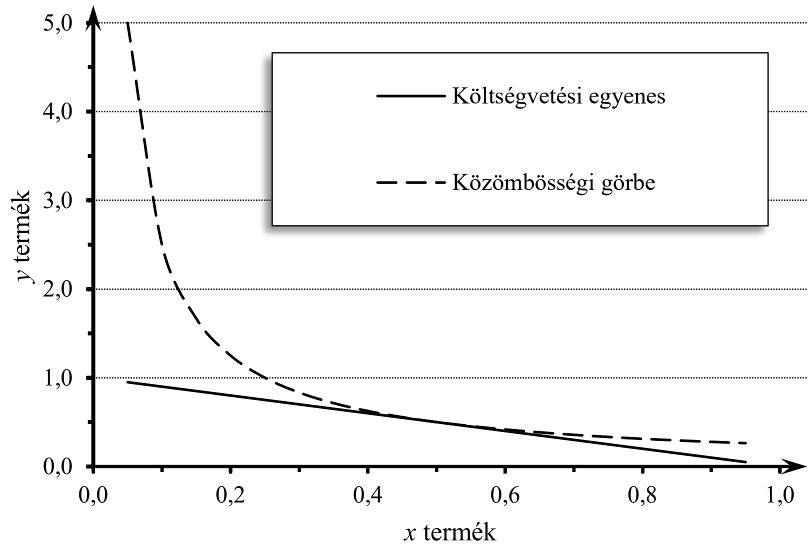
Itt egy olyan speciális hasznosságfüggvényt vizsgálunk, amelyet maximalizálva, a fogyasztó optimális választása ugyanaz, mint ha az (5.4) hüvelykujjszabályt követné. Azt is mondhatjuk, hogy az (5.5) hasznosságfüggvény *racionalizálja*, észszerűvé teszi az (5.4) [(3.3. tétel)] hüvelykujjszabályt:

$$U(x, y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{5.5}$$

Ez a hasznosságfüggvény önmagában is jól értelmezhető: a két fogyasztott mennyiség súlyozott mértani közepe.

Az 5.1. ábra $\alpha = 1/2$, $p = 1 = q$ esetén mutatja az $x + y = 1$ költségvetési egyenest és az őt érintő $U(x, y) = \sqrt{xy} = 1/4$ *közömbösségi görbét* – egy hiperbolát, amelyen azok az (x, y) kombinációk helyezkednek el, amelyek közti választás közömbös a fogyasztónak. Ennél magasabb közömbösségi görbe megvalósíthatatlan (nem telik a jövedelemből), ennél alacsonyabb viszont nem optimális (megmarad a jövedelem egy része, és itt haszontalanná válik).

5.1. ábra. Közömbösségi görbe és költségvetési egyenes



A 3.3. tételt alkalmazva adódik az

5.1. tétel. *Az (5.5) hasznossági függvény az (5.2) egyéni költségvetési feltétel melletti maximumát az (5.4) helyen veszi fel.*

A fogyasztók hasznosságfüggvénye közvetlenül nem figyelhető még, és már a 3.3. alfejezetben is hangsúlyoztuk, hogy több (végtelenül sok) olyan hasznosságfüggvény létezik, amely ugyanahhoz az optimális döntéshez vezet. Például (5.5)-tel ekvivalens az additív

$$\tilde{U}(x, y) = \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{5.5A}$$

hasznosságfüggvény-sereggel (seregről beszélünk, mert tetszőleges, 1-nél nagyobb alapú logaritmusfüggvényre gondolhatunk). A továbbiakban természetes alapú logaritmussal számolunk. A hasznosságfüggvény megfoghatatlansága sok problémát okoz, de nem foglalkozunk vele.

* Kitérőként szólunk az emelt szintű közgazdaságtan egyik alapfogalmáról, a határhaszonról. Az x, illetve az y termék *határhasznának* nevezzük az $U(x, y)$ hasznosságfüggvény x, illetve y változó szerinti meredekségét, vagy képletben (a különleges delta a parciális deriválást jelöli)

$$MU_x = \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) \qquad \text{és} \qquad MU_y = \frac{\partial}{\partial y} U(x, y).$$

Kétváltozós függvények elméletéből ismert, hogy az $U(x, y) = c$ szintvonal (közömbösségi görbe) meredeksége éppen a fenti két határhaszon arányának az ellentettje:

$$\left.\frac{dU(x, y)}{dx}\right|_{U(x,y)=c} = -\frac{MU_x}{MU_y}.$$

Ekkor a megfelelő optimumfeltétel – az optimumban a költségvetési egyenes érinti a közömbösségi görbét – szerint a fenti két hányados azonos p/q árhányadossal.

Az (5.5A) hasznosságfüggvény esetén $MU_x = \alpha/x$ és $MU_y = (1-\alpha)/y$. Az optimumfeltétel szerint $\alpha y/[(1-\alpha)x] = p/q$, ahonnan már adódik (5.2).

Következik az 5.1. tétel általánosítása $n \geq 2$ termékre.

5.2. feladat. $n > 1$ darab pozitív szám súlyozott számtani és a mértani közepe közti egyenlőtlenséget (3.2. tétel) ügyesen alkalmazva bizonyítsuk be, hogy ha a fogyasztó hasznosságfüggvénye

$$U(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad \text{ahol} \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0, \qquad \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1,$$

jövedelme 1, és az i-edik áru egységára $p_i > 0$, akkor optimális fogyasztási kosara

$$x_i = \frac{\alpha_i}{p_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Eddig egy fogyasztó keresleti függvénypárját vizsgáltuk, most a sok fogyasztóból álló piacon kialakuló keresletet elemezzük. A fogyasztó indexe $h = 1, 2, \ldots, H$, jövedelme m_h, fogyasztása (x_h, y_h) és preferenciasúlya α_h. A piaci keresleti függvénypár

$$x(p,q) = \sum_{h=1}^{H} x_h(p,q,m_h) \qquad \text{és} \qquad y(p,q) = \sum_{h=1}^{H} y_h(p,q,m_h),$$

ahol $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n$. Behelyettesítve (5.4) megfelelően indexált változatát:

$$x(p,q) = \frac{M_\alpha}{p} \qquad \text{és} \qquad y(p,q) = \frac{M - M_\alpha}{q}$$

ahol

$$M = \sum_{h=1}^{H} m_h \qquad \text{és} \qquad M_\alpha = \sum_{h=1}^{H} \alpha_h m_h$$

rendre az összjövedelem, valamint a súlyozott és a zsugorított összjövedelem. Könnyű belátni, hogy a piaci keresleti függvények lényegében csak akkor összesíthetők egyetlen szuperfogyasztó egyéni keresleti függvényévé, ha minden háztartás preferenciasúlya azonos: $\alpha_h \equiv \alpha$. Ekkor $M_\alpha = \alpha M$ stb.

5.1. példa. Végletessége ellenére érdekes a helyettesítést kizáró hasznosságfüggvény (amely a későbbi 6.2. példában szereplő specifikációból kapta a Leontief nevet):

$$U(x,y) = \min(ax, by), \qquad a, b > 0. \tag{5.6}$$

Ilyenkor az optimum $ax = by$, azaz az (5.2) költségvetési feltétel miatt

$$px + q\frac{ax}{b} = m, \qquad \text{azaz} \qquad x^\circ = \frac{mb}{pb+qa} \qquad \text{és} \qquad y^\circ = \frac{ma}{pb+qa}.$$

Megjegyezzük, hogy a helyettesítés nélküli (5.6) hasznosságfüggvény végletesen leegyszerűsíti a valóságos helyettesítés korlátait, hiszen még a folyadék és az étel is valamennyire helyettesíti egymást: a narancslé csökkenti az éhséget is, a narancs pedig oltja a szomjat is. De ez a szélsőséges feltevés számunkra több modellben is értékes, mert nagyon megkönnyíti a számolást. Legszemléletesebb példa az (5.6) hasznosságfüggvényre $a = b = 1$ esetén: x, illetve y rendre az egyforma bal és jobb kesztyűk száma. Gyakorlatilag csak a kesztyűpároknak van haszna, és ezek számát éppen (5.6) adja. Fontos hangsúlyozni, hogy a hasznosság szempontjából csak az a/b arány számít, és minél nagyobb ez a relatív érték, annál kevesebbet ér X Y-hoz képest.

Az alfejezet végén az 5.2. táblázat kicsit kerekítve bemutatja, hogyan oszlott meg 2014-ben az átlagos, a legszegényebb, illetve a leggazdagabb jövedelmi decilis (vö. 8.3. táblázat) fogyasztási kiadása a legfontosabb cikkcsoportok között. Figyelemre méltó, hogy az egyes cikkcsoportok részesedése az összfogyasztásban nem független az összfogyasztástól, azaz a jövedelemtől. A szegények arányosan többet költenek élelmiszerre (beleértve a nemalkoholos italokat) és kevesebbet közlekedésre, mint a gazdagok: 29,4 vs. 17,9%, illetve 8,9 vs. 15,5%.

5.2. táblázat. A magyar háztartások egy főre jutó éves fogyasztási szerkezete decilisenként, eFt, 2014

Jövedelem Fogyasztási szerkezet	Legszegényebb decilis	Átlag decilis	Leggazdagabb decilis
Élelmiszer	119,7	209,9	317,6
Szeszes ital és dohány	21,1	28,4	44,9
Ruházat	14,2	32,8	76,0
Lakásfenntartás	108,7	208,7	371,7
Lakberendezés	11,8	33,6	70,1
Egészségügy	13,9	44,8	80,5
Közlekedés	36,3	114,3	275,2
Hírközlés	24,4	67,6	121,4
Kultúra	17,4	64,0	184,5
Oktatás	5,9	7,7	8,6
Vendéglátás és turizmus	12,5	34,4	95,9
Egyéb	22,0	60,5	125,0
Öszesen	407,1	907,7	1771,3

5.3. Jelen és jövő idejű fogyasztás: két időszak

Az elvont elmélet egyik előnye, hogy ugyanazt a modellt többféle közgazdasági probléma megértésére is alkalmazhatjuk. Az 5.2. alfejezet modelljét most a jelen és a jövő közti választásra alkalmazzuk.

Két egyforma hosszúságú időszakot mérlegelünk: a jelent (amikor dolgozunk), és a jövőt (amikor már nem dolgozunk). Keresetünk w, amelyből s mennyiséget takarítunk meg, s ez $R > 1$ kamategyüttható (1+kamatláb) szerint gyarapodva járul hozzá időskori fogyasztásunkhoz, a változók pozitív valós számok.

A két időszak fogyasztása rendre

$$c = w - s \qquad \text{és} \qquad d = Rs. \tag{5.7}$$

Kérdés: mekkora megtakarítás maximalizálja az $U(c, d)$ hasznosságfüggvényt?

A hasznosságfüggvényt most additív alakban írjuk föl [(2.26)]:

$$U(c, d) = \log c + \delta \log d, \tag{5.8}$$

ahol δ egy 0 és 1 közötti valós szám, az ún. *leszámítolási együttható*. (Az elnevezés hibás, mert ekkor minél nagyobb a leszámítolási együttható értéke, annál kisebb a leszámítolás; de több kárt okozna, mint hasznot, ha δ helyett $1/\delta$-t írnánk, ezért nem tesszük.) Általános érvényű megfigyelés, hogy a jövőbeli fogyasztást kevesebbre értékeljük, mint a jelen idejűt: „jobb ma egy veréb, mint holnap egy túzok." Aki az optimálisnál kevesebbet takarít meg (gyakori eset), az időskorára nélkülözni fog. Aki az optimálisnál többet takarít meg (ritka eset), az felesleges áldozatot hoz a jövőbeli fogyasztásért.

Közömbös, hogy milyen $a > 1$ alapú logaritmussal számolunk, mert az áttérés az egyik alapról a másikra csak egy konstans szorzóval módosítja a hasznosságfüggvényt. A logaritmusfüggvénynek többek között az az előnye, hogy konkáv, és a fogyasztás növekedésével csökken a többlethasznosság (minden szigorúan konkáv függvény érintőjének a meredeksége csökken).

5.2. tétel. *Az (5.8) hasznosságfüggvény esetén az optimális megtakarítás és a fogyasztási pár rendre*

$$s^o = \frac{\delta w}{1+\delta}, \qquad c^o = \frac{w}{1+\delta} \qquad \text{és} \qquad d^o = \frac{R\delta w}{1+\delta}. \tag{5.9}$$

Két bizonyítást is adunk a tételre, de a kiindulópont közös.

1. bizonyítás. Behelyettesítve (5.7)-et (5.8)-ba, adódik a *származtatott* hasznosságfüggvény:

$$U[s] = \log(w-s) + \delta\log(Rs). \tag{5.10}$$

Az elemi megoldáshoz transzformálni kell a hasznosságfüggvényt. Mivel a logaritmusfüggvény monoton növekvő, $U[s]$ helyett a transzformált és ekvivalens

$$V[s] = (w-s)s^\delta$$

hasznosságfüggvényt maximalizáljuk. A 3.3. tétel 1. következményéből némi számolással kapjuk (5.9)-et. □

2. bizonyítás.* Aki tanult kalkulust, az transzformáció nélkül, egyszerű deriválással meghatározhatja az optimális megtakarítást. Természetes alapú logaritmusfüggvénnyel számolva, az optimumban (5.10) deriváltja nullává válik:

$$0 = U'[s] = -\frac{1}{w-s} + \frac{\delta}{s}.$$

Rendezéssel és és onnan (5.17)-en keresztüli helyettesítéssel adódik az (5.9) optimum. □

5.2. példa. Leszámítolás nélkül ($\delta = 1$) az optimális megtakarítás és a két fogyasztás a munkajövedelem fele: $s^o = c^o = d^o = w/2$.

Mielőtt számszerűsítenénk a képletet, megjegyezzük, hogy legfontosabb alkalmazását a Modigliani-féle (1954) ún. *életciklusmodell* adja. Csak fiatalkorban van elsődleges jövedelmünk: $w > 0$, ezért akkor takarékoskodunk; idős korban feléljük a megtakarítást. Az egyszerűség kedvéért mindkét időszak hossza $T = 25$ év, tehát mind az éves $R[1]$ kamategyütthatót, mind az éves $\delta[1]$ leszámítolási együtthatót T-edik hatványra kell emelni, hogy megkapjuk a hosszú időszakra vonatkozó együtthatókat:

$$R = R[1]^T \qquad \text{és} \qquad \delta = \delta[1]^T.$$

Csak az éves szinten megadott kamatláb- és leszámítolási együtthatónak van közvetlen közgazdasági jelentése. (A 9. fejezettől kezdve évjárati modellekkel is dolgozunk, ahol a két időszak hossza általában különböző: $S > T$.) Az 5.3. táblázatban a sorokban a $\delta[1] = 1$, 0,98 és 0,96-os leszámítolási együtthatóhoz tartozó fogyasztás áll. A 2. oszlopban a kamatlábtól független fiatalkori fogyasztás: c, amely a leszámítolás fokozódásával 0,5-ről 0,735-re emelkedik. A 3–5. oszlopokban az $R[1] = 1$; 1,02 és 1,04 kamategyütthatóknak megfelelő időskori $d(\cdot)$ fogyasztások szerepelnek, a kamategyüttható emelkedésével növekszik az érték (maximum 1,333), a leszámítolás erősödésével gyengül (minimum 0,265).

5.3. táblázat. Kamategyüttható, leszámítolás, optimális fogyasztási pár

	Fiatalkori	Időskori		
	fogyasztás			
		Kamategyüttható $R[1]$		
Leszámítolási eh.		1	1,02	1,04
$\delta[1]$	c	$d(0)$	$d(2)$	$d(4)$
1,00	0,500	0,500	0,820	1,333
0,98	0,624	0,376	0,617	1,003
0,96	0,735	0,265	0,435	0,706

5.3. feladat. *a)* Igazoljuk, hogy az (5.8) logaritmikusan additív hasznosságfüggvény esetén az időskori fogyasztás pontosan akkor egyenlő a fiatalkorival, ha a leszámítolási együttható a kamategyüttható reciproka: $\delta = 1/R$!

b) Igazoljuk, hogy az időskori fogyasztás pontosan akkor kisebb, mint a fiatalkori, ha a leszámítolási együttható kisebb, mint a kamategyüttható reciproka: $\delta < 1/R$!

Mennyiben használható ez a modell? Például annyiban, hogy a fogyasztói türelmetlenséget egy számmal, a leszámítolási együtthatóval jellemzi: minél kisebb a δ, a fogyasztó annál kevesebbet tesz félre időskori fogyasztásra. Az is kiderül, hogy minél hatékonyabb a megtakarítás (minél nagyobb az R kamategyüttható), annál nagyobb lesz az időskori fogyasztás. Furcsa viszont, hogy az optimális megtakarítási hányad, s^{o}/w független a w keresettől: a valóságban ez növekvő függvény. Súlyosabb problémák jelentkeznek a leszámítolás kalibrálásánál és a több időszakos általánosításnál (5.4. alfejezet).

Eddig nagyon egyszerű, paraméteres hasznosságfüggvényt alkalmaztunk. Mennyiben maradnak érvényesek eredményeink, ha tetszőleges hasznosságfüggvénnyel dolgozunk? Legegyszerűbb ilyen általánosítás a következő:

$$U(c, d) = u(c) + \delta u(d), \tag{5.11}$$

ahol $u(x)$ szigorúan növekvő és szigorúan konkáv skalár–skalár függvény, amelynek érintője $x = 0$-ban nagyon meredek, akár függőleges. Az 5.3. feladat eredménye például érvényes marad.

5.3.* tétel. *Az (5.11) általános életpálya-hasznosságfüggvény esetén az időskori fogyasztás pontosan akkor kisebb, mint a fiatalkori, ha a leszámítolási együttható és a kamategyüttható szorzata kisebb, mint 1:*

$$d^{\mathrm{o}} < c^{\mathrm{o}}, \qquad \text{ha} \qquad \delta R < 1.$$

Bizonyítás. A kalkulus segítségével könnyen adódik az állítás, de ekkor fel kell tenni, hogy u differenciálható függvény a $[0, w]$ szakaszon. Tekintsük a származtatott

$$U[s] = u(w - s) + \delta u(Rs)$$

hasznosságfüggvényt. Deriváljuk $U[s]$-t, és a derivált gyökeként határozzuk meg a belső optimumot (3.4.* tétel):

$$U'[s] = -u'(w-s) + \delta R u'(Rs) = 0.$$

Visszahelyettesítve az implicit optimumfeltételbe a $c^{\text{o}} = w - s^{\text{o}}$ és a $d^{\text{o}} = Rs^{\text{o}}$ párt:

$$u'(c^{\text{o}}) = \delta R u'(d^{\text{o}}).$$

Mivel $u' > 0$ csökkenő, ezért ha $c^{\text{o}} > d^{\text{o}}$, akkor

$$u'(d^{\text{o}}) > u'(c^{\text{o}}) = \delta R u'(d^{\text{o}}),$$

s egyszerűsítve $u'(d^{\text{o}})$-rel, $\delta R < 1$ és viszont. □

Megjegyezzük, hogy ez az elegáns eredmény a valóságban gyakran nem érvényes. Elegendő, ha arra gondolunk, hogy milyen sokan vásárolnak nagyon magas (reál)kamatláb mellett, például a mostani 0–3% körüli infláció mellett évi 10–20%-os hitelre. Nehéz elhinni, hogy egy ilyen fogyasztó ilyen mértékben leszámítolná a jövő hasznosságát, inkább egyszerűen arról van szó, hogy a fogyasztó nagyon türelmetlen.

Újraszámoljuk a megtakarítási kérdést egy másik speciális hasznosságfüggvényre.

5.3. példa. Megtakarítás Leontief-féle hasznosságfüggvénynél. (5.6)-ot alkalmazva az új szereposztásban:

$$U(c,d) = \min(c,d).$$

Ekkor az optimális fogyasztási párra $c = d$, amelybe (5.7)-et behelyettesítve, adódik az optimális megtakarítás:

$$w - s = Rs, \qquad \text{azaz} \qquad s^{\text{o}} = \frac{w}{1+R} \tag{5.12}$$

és a hozzá tartozó fogyasztáspár:

$$c^{\text{o}} = d^{\text{o}} = \frac{wR}{1+R}.$$

Figyeljük meg, hogy ellentétben (5.9)-cel, itt szerepel a kamategyüttható az optimumban – s ez a tipikus.

Röviden kitérünk a gyermeknevelés költségére is, amely tipikusan a szülők munkavállalási korában merül föl. Ennek legegyszerűbb modellezési módszere, hogy összeadjuk a férj és a feleség fiatalkori fogyasztását és jövedelmét (marad a c és a w jelölés), és feltesszük, hogy minden gyermek fogyasztása a szülők együttes fogyasztásának ψ-szerese, ahol $0 < \psi < 1/2$. Jelölje n természetes szám a gyermekek számát, akkor a házaspár fiatalkori fogyasztása $(w-s)/(1+\psi n)$-re csökken. Behelyettesítve az (5.12) optimalitási feltétel általánosításába:

$$\frac{w-s}{1+\psi n} = Rs, \qquad \text{azaz} \qquad s^{\text{o}} = \frac{w}{1+(1+\psi n)R}.$$

5.4. Három időszak, halasztás*

Mi történik, ha 2- helyett 3-időszakos pályát tanulmányozunk? A leszámítolás eredeti modelljében az egymást követő időszakok hasznosságaránya, leszámítolása változatlan: *exponenciális leszámítolás*, itt technikai egyszerűsítésként nincs is leszámítolás. A valóságban azonban a változatlan leszámítolás feltevése gyakran sérül, s emiatt a döntéshozó az 1. időszak végén újraszámolja az optimális pályát: a 3. időszakra halasztja az igazi takarékoskodást, a fogyókúrát, majd újra lemond róla (Strotz, 1955 és Phelps–Pollak, 1968) – szakszóval *időbeli inkonzisztencia*. Ezt az újratervezést az ún. *hiperbolikus leszámítolással* [(5.14H)] modellezzük (Laibson, 1997).

A képleteket egyszerűsítendő a kamatmentes esetet vizsgáljuk ($R = 1$), és eltekintünk a hitel- és a betéti kamatláb különbségétől. Bonyolult lenne a három időszak kereseteivel és megtakarításaival külön foglalkozni, de speciális helyzetünkben nincs is rá szükség. Elegendő, hogy az életpálya-megtakarítás 0. Ezért w-vel jelölve az életpálya-keresetet, akármilyen (c, d, e) fogyasztási pályára teljesül

$$c + d + e = w. \tag{5.13}$$

Kiindulásként a leszámítolás nélküli esetet vizsgáljuk:

$$U(c, d, e) = \log c + \log d + \log e. \tag{5.14}$$

5.4. tétel. *a) Leszámítolás nélkül, és nulla kamatláb* ($R = 1$) *esetén az optimális fogyasztási pálya egyenes:*

$$c^{\mathrm{o}} = d^{\mathrm{o}} = e^{\mathrm{o}} = \frac{w}{3}. \tag{5.15}$$

b) Ha az egyén az 1. időszak végén újraszámolná a pályát a maradék $w_1 = w - c^{\mathrm{o}}$ *életpálya-keresetre és az*

$$U_1(d, e) = \log d + \log \tag{5.16}$$

maradék hasznosságfüggvényre, akkor a maradék fogyasztási optimumpár változatlan maradna: (5.15).

Bizonyítás. *a)* A Jensen-egyenlőtlenségből következik (5.15).

b) $U(c, d, e) = \log c + U_1(d, e)$ szerint fix co-re $U_1(d, e)$ a maximumát $d = e$-ben veszi föl, és a maradék $2w/3$ jövedelemből (5.15b)–(5.15c) adódik. □

Laibson (1997) vezette be a hiperbolikus leszámítolást, ahol a szokásos exponenciális leszámítolást a jövőben még egy $\varphi < 1$ második leszámítolási együttható (jelenérzékenység) fokozza. Mivel nálunk egy olyan speciális exponenciális leszámítolás van, amely valójában nem is létezik, egyszerűen tekintsük a $t = 1$-edik időszakban kezdődő optimalizálási feladatot:

$$U_{\mathrm{H}}(c, d, e) = \log c + \varphi[\log d + \log e], \qquad \text{ahol} \qquad \varphi < 1. \tag{5.14$H1$}$$

Először a kezdeti terv optimumát számítjuk ki.

5.5. tétel. *Hiperbolikus leszámítolásnál a kezdeti terv időben előrehozza a fogyasztást:*

$$c^* = \frac{w}{1+2\varphi} > c^{\mathrm{o}}, \qquad d^* = \varphi c^* < d^{\mathrm{o}} \qquad \text{és} \qquad e^* = \varphi c^* < e^{\mathrm{o}}. \tag{5.17}$$

Bizonyítás. Időlegesen rögzítve c-t, (5.14H1) értelmében a maradék optimumra $e^* = d^*$. Ezt visszahelyettesítve (5.14H1)-be:

$$V(c) = U_1(d^*, e^*) = 2\log d^*.$$

Visszatérünk (5.14H1)-hez:

$$U_{\mathrm{H}}(c, d^*, e^*) = \log c + 2\varphi \log d^* \to \max,$$

feltéve, hogy

$$c + 2d^* = w.$$

A 3.3. tétel 3. következményét $\gamma = 1$, $\beta = 2\varphi$, $\alpha = 1/(1+2\varphi)$, $p = 1$, $q = 2$ és $m = w$ szereposztásban alkalmazva, adódik (5.17). □

Látni fogjuk, hogy az újratervezésnél változik a tervezett optimum. Valóban, a $t = 2$-ben kezdődő célfüggvény már nem U_{H} 2. és 3. tagjának összege, hanem

$$\tilde{U}_2(d, e) = \log d + \varphi \log e. \tag{5.14H2}$$

5.6. tétel. *Hiperbolikus leszámítolásnál az újraszámolás a maradék optimális pályán is előrehozza a fogyasztást:*

$$d^{**} = \frac{2w\varphi}{(1+\varphi)(1+2\varphi)} > d^* \qquad \text{és} \qquad e^{**} = \varphi d^{**} < e^*. \tag{5.18}$$

Bizonyítás. Egyszerű optimalizálással adódik (5.18b). Őt és (5.17a)-t behelyettesítjük az (5.13) mérlegegyenletbe:

$$w = \frac{w}{1+2\varphi} + d^{**} + \varphi d^{**}.$$

Rendezve d^{**}-ra, adódik (5.18a). □

Számpélda. $\delta = 1$, $w = 1$. Az 5.4. táblázat bal felének 1., illetve 2. sora tartalmazza az exponenciális leszámítolásnál ($\varphi = 1$) a kezdeti és a folytatott pályát, amelyek egybeesnek. A jobb fél megfelelő soraiban a hiperbolikus leszámítolás ($\varphi = 1/2$) miatt a két pálya elválik.

5.4. táblázat. Fogyasztási pályák exponenciális és hiperbolikus leszámítolásnál

	Nincs leszámítolás			Hiperbolikus leszámítolás		
	Optimális fogyasztási pálya					
	c^{o}	d^{o}	e^{o}	c^*	d^*	e^*
Kezdet	1/3	1/3	1/3	1/2	1/4	1/4
Folytatás	-	1/3	1/3	–	1/3	1/6

6. Vállalati döntések

A fogyasztói döntések tanulmányozása után rátérünk a vállalatokéra A 6.1. alfejezetben megelőlegezzük az egész fejezetet: a termelés kínálatát az ár növekvő függvényeként vezetjük le. A 6.2. fejezettől kezdve mélyebbre ásunk: a termelés két alaptényezőjét különböztetjük meg: a tőkét (gépeket, épületeket, valamint anyagokat) és a munkát (a 2.2. alfejezetben a munkát elhanyagoltuk). A 6.3. alfejezetben adott mennyiségű kibocsátást általában nagyon sok tőke–munka-kombinációval előállíthatunk, de minimális költségre törekedve általában egyértelmű az optimum. A 6.4. alfejezetben a vállalkozó célja a bevétel és a kiadás közti különbség, a közgazdasági profit maximalizálása. (Az üzleti profit ennél nagyobb, mert a költség nem tartalmazza a saját tőke „költségét”.) Ha a piacon csak egy termelő tevékenykedik, akkor monopóliumról beszélünk, s ekkor a vevők ki vannak szolgáltatva a monopolistának. Néhány termelő versengése esetén oligopólium alakul ki, s ekkor a 3. fejezet n személyre általánosított Nash-egyensúlya adja a kimenetelt. Ha nagyon sok kis termelő versenyez egymással, akkor a tökéletes verseny miatt eltűnnek a profitok.

6.1. Kínálati függvények

Már a 2.3. alfejezetben találkoztunk a kínálati függvénnyel, amely a P ár függvényében megadta a termelők által eladásra kínált $S(P)$ mennyiséget [(2.10)]. Most az 5.1. fejezethez hasonlóan levezetünk két elemi kínálati függvényt.

Először tegyük föl, hogy egy városban egy adott típusú (például egy egyszobás) lakást havonta meghatározott áron lehet bérbe adni. Sok egyénnek van ilyen lakása, amelyet megfelelő P ár esetén hajlandó bérbe adni. A potenciális bérbeadók eloszlásfüggvénye $F(P)$, azaz P bérleti ár mellett a potenciális tulajdonosok $F(P)$ része hajlandó bérbe adni lakását: $F(0) = 0$ és $F(\infty) = 1$. Emiatt a kínálati függvény $S(P) = F(P)$. Ha a bérlők érdekében a kormányzat felülről korlátozza a lakbért, akkor csökken a kínált lakások száma.

Még fontosabb a munkakínálati modell. Az egyszerűség kedvéért a legegyszerűbb munkákra összpontosítva, tegyük föl, hogy minden dolgozónak vagy egy rezervációs bére: w, amelyért hajlandó munkába állni, de kevesebbért nem. (Többek között ez függ a munkanélküliségi segély értékétől és folyósítási feltételeitől.) Legyen $F(w)$ annak valószínűsége, hogy w bérért egy véletlenül választott dolgozó munkába áll: $F(0) = 0$ és $F(\infty) = 1$. Ha a kormányzat w_m minimumbért hirdet meg, akkor az érintett dolgozók $F(w_\mathrm{m})$ hányada vállal munkát. Minél magasabb a minimálbér, annál többen állnak munkába, viszont annál kevésbé érdemes a vállalatoknak munkát ajánlaniuk.

6.2. Termelés

A közgazdaságtan hagyományos módon megkülönböztet két termelési tényezőt: a tőkét és a munkát, jelük rendre K és L. A termelési függvény a kibocsátást (egyelőre Y helyett Q-t írunk) a két termelési tényező függvényében adja meg:

$$Q = F(K, L), \tag{6.1}$$

ahol az F függvény pozitív, és mindkét változójában növekvő. A mai megfigyelőnek talán a legszemléletesebb példa, ha összehasonlítja egy kis bolt napi forgalmát egy szupermarketével: a jóval nagyobb tőkeellátottság miatt a szupermarketben 10 alkalmazott 100-szor nagyobb forgalmat bonyolít le, mint a kis boltban 3 alkalmazott. Ugyanakkor két egyforma berendezésű szupermarket forgalma is különbözhet attól függően, hogy hány hasonló bolt van a környéken: a rossz ellátottságú körzetben zsúfolásig telt a bolt, a jó ellátottságú körzetben viszont alig lézengenek a vásárlók.

Most háromféle termelési függvényt különböztetünk meg aszerint, hogy miképp változik a kibocsátás, ha mindkét termelési tényezőt egyforma mértékben ($\mu > 1$) bővítjük.

Állandó skálahozadékról beszélünk, ha a kibocsátás minden (K, L, μ) hármasra arányosan bővül:

$$F(\mu K, \mu L) = \mu F(K, L). \tag{6.2a}$$

Csökkenő skálahozadékról beszélünk, ha a kibocsátás minden (K, L, μ) hármasra az arányosnál kevésbé bővül:

$$F(\mu K, \mu L) < \mu F(K, L), \quad \mu > 1. \tag{6.2b}$$

Növekvő skálahozadékról beszélünk, ha a kibocsátás minden (K, L, μ) hármasra az arányosnál jobban bővül:

$$F(\mu K, \mu L) > \mu F(K, L), \quad \mu > 1. \tag{6.2c}$$

A legtöbb termelési függvény skálahozadék-típusa pontról pontra változhat. De vannak robusztus termelési függvények. Például a kézműves termékek esetén a terjeszkedésnél aránytalanul nőhetnek a költségek, ezért nem érdemes növelni a vállalat méretét. Az autógyártásban viszont növekvő skálahozadék érvényes: a mai tömegautókat gyártó cégek egyenként évente több millió autót termelnek – hatékonyan.

A termelési függvény egyik általános jellegzetessége, hogy adott tartományban szinte folytonos *helyettesítés* van a tőke és a munka között: lehet sok munkával és kevés tőkével; illetve kevés munkával és sok tőkével ugyanannyi terméket előállítani: e szintvonal latin neve *izokvant*. Most bemutatunk egy fontos speciális termelési függvényt, amelyet két felfedezőjéről neveztek el.

6.1. példa. Cobb–Douglas-termelési függvény esetén K és L változóval

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}, \tag{6.3}$$

ahol $A, \alpha, \beta > 0$ állandók. Elfajult speciális esetben visszakapjuk a (4.1) termelési függvényt: $\alpha = 1$ és $\beta = 0$.

6.1. feladat. Igazoljuk, hogy a Cobb–Douglas-termelési függvény állandó skálahozadékú, ha $\alpha+\beta = 1$; csökkenő skálahozadékú, ha $\alpha+\beta < 1$; illetve növekvő skálahozadékú, ha $\alpha + \beta > 1$!

A 6.1. példa és a 6.1. feladat alapján röviden vázolhatjuk az ún. *neoklasszikus* növekedéselmélet keretét (1957), amelyet megalkotójáról, Solow Nobel-díjas amerikai közgazdászról neveztek el. Egy vállalat helyett egy egész gazdaságot mérlegelünk. Q helyett Y-t írva, időben változóvá tesszük (6.3)-at:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}, \qquad t = 0, 1, 2, \dots. \tag{6.3$'$}$$

Egyszerűség kedvéért tegyük föl, mindhárom tényező egyenletes ütemben növekszik:

$$A_t = A_0 G_A^t, \qquad K_t = K_0 G_K^t, \qquad L_t = L_0 G_L^t, \tag{6.4}$$

ahol $G_A > 1$, $G_K > 1$ és $G_L > 1$ rendre a műszaki haladás, a tőke és a munka növekedési együtthatója, valamint A_0, K_0 és L_0 a megfelelő pálya kezdőértéke.

6.1. tétel. *A Solow-modellben a kibocsátás növekedési együtthatója a három növekedési együttható hatványainak a szorzata:*

$$G_Y = G_A G_K^\alpha G_L^{1-\alpha}, \qquad Y_t = Y_0 G_Y^t. \tag{6.5}$$

Bizonyítás. Helyettesítsük be (6.3′)-ba (6.4)-et:

$$Y_t = A_0 G_A^t (K_0 G_K^t)^\alpha (L_0 G_L^t)^{1-\alpha} = A_0 K_0^\alpha L_0^{1-\alpha} [G_A G_K^\alpha G_L^{1-\alpha}]^t. \tag{6.6}$$

Bevezetve az $Y_0 = A_0 K_0^\alpha L_0^{1-\alpha}$ jelölést, (6.6)-ból adódik (6.5). □

Gyorsan változó létszámú népesség esetén (például az USA) vizsgálni kell az egy főre jutó termelés alakulását is. Ehhez a következő jelöléseket vezetjük be:

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} \qquad \text{és} \qquad k_t = \frac{K_t}{L_t}.$$

Ekkor (6.5) segítségével igazolható a 6.1. tétel következménye.

Következmény. *A Solow-modellben az egy főre jutó tőke növekedési együtthatója a tőke és a munka növekedési együtthatójának a hányadosa; az egy főre jutó termelés növekedési együtthatója a műszaki haladás és az egy főre jutó tőke növekedési együtthatója γ-adik hatványának a szorzata:*

$$G_k = \frac{G_K}{G_L}, \qquad G_y = G_A G_k^\gamma, \qquad y_t = y_0 G_y^t.$$

A modell elég jól leírja a fejlett országok hosszabb távú fejlődését. Jó közelítéssel a teljes gazdagságra összesítve $\alpha \approx 1/3$ (és $\beta \approx 2/3$). Az USA-ban 1909 és 1949 között az egy főre jutó kibocsátás körülbelül megkétszereződött, azaz $G_y = 2^{1/40} = 1{,}017$; azaz a munkatermelékenység növekedési üteme 1,7% volt. Ugyanakkor a műszaki haladás sokkal többet hozott a konyhára, mint a gépesítés (feltéve, hogy el lehet a két dolgot választani egymástól).

A közgazdaságtanban, különösen éves adatoknál, a növekedési együtthatók helyett gyakrabban számolnak *növekedési ütemekkel*: $g = G - 1$, vagy esetünkben

$$g_Y = G_Y - 1, \qquad g_K = G_K - 1, \qquad g_L = G_L - 1, \qquad g_A = G_A - 1,$$

$$g_y = G_y - 1, \qquad g_k = G_k - 1.$$

Szerény éves növekedés esetén az együtthatókra érvényes (6.5) szorzategyenlőség helyett a növekedési ütemekre közelítő összegegyenlőségeket kapunk. Ennek heurisztikus levezetéséhez azonban egy segédtételre és annak következményére van szükség.

6.1. segédtétel. *Kicsiny növekedési ütemeknél a szorzat növekedési üteme közelítőleg a növekedési ütemek összege:*

$$g_{XY} \approx g_X + g_Y, \qquad ha \qquad g_X, g_Y \approx 0.$$

Bizonyítás. A szorzat növekedési üteme

$$g_{XY} = \frac{X_t Y_t}{X_{t-1} Y_{t-1}} - 1.$$

Beírva az $X_t = (1 + g_X)X_{t-1}$ és $Y_t = (1 + g_Y)Y_{t-1}$ definíciókat,

$$g_{XY} = (1 + g_X)(1 + g_Y) - 1 = g_X + g_Y + g_X g_Y.$$

Ha $g_X, g_Y \approx 0$, akkor szorzatuk nagyon kicsiny, azaz érvényes a közelítő egyenlőség. □

Két számpélda: *1)* $G_X = 1{,}02$ és $G_Y = 1{,}01$ esetén $G_{XY} = 1{,}0302 \approx 1 + 0{,}02 + 0{,}01$. *2)* Gyakori hiba, hogy a közelítést a 15. fejezetben szereplő együtt élő nemzedékek modelljére is kiterjesztik. Például egy nemzedék alatt mind a népesség, mind a termelékenység megduplázódik: $G_N = 2$ és $G_P = 2$, de a termelés nem 200, hanem 300%-kal növekszik: $G_{NP} = G_N G_P = 2 \times 2 = 4$!

Következmény. *Kicsiny növekedési ütemeknél egy hatvány növekedési üteme közelítőleg egyenlő a kitevő és az alap növekedési ütemének szorzatával:* $g_{X^\gamma} \approx \gamma g_X$.

Bizonyítás. A 6.1. segédtétel segítségével könnyű belátni, hogy

$$g_{\sqrt{X}} \approx \frac{1}{2} g_X.$$

Hasonlóan egyszerűen következik, hogy $g_{XYZ} \approx g_X + g_Y + g_Z$, azaz

$$g_{\sqrt[3]{X}} \approx \frac{1}{3} g_X.$$

* Az általános kitevő tárgyalásához felső matematikára van szükség. Természetes alapú ($e = 2{,}718\ldots$) logaritmusra $g_X \approx 0$ esetén $\log(1 + g_X) \approx g_X$, azaz

$$\log X_t = \log(1 + g_X) + \log X_{t-1} \approx g_X + \log X_{t-1},$$

azaz $g_X \approx \log X_t - \log X_{t-1}$. Megismételve a levezetést a hatványra,

$$g_{X^\gamma} \approx \log X_t^\gamma - \log X_{t-1}^\gamma = \gamma[\log X_t - \log X_{t-1}] \approx \gamma g_X.$$

□

Innen már következnek az alábbi Solow-féle közelítések: $g_Y \approx g_A + \alpha g_K + (1 - \alpha) g_L$, $g_k \approx g_K - g_L$ és $g_y \approx g_A + \alpha g_k$, $g_k = g_A/7$.

Egy másik fontos példa következik.

6.2. példa. A Leontief-féle termelési függvény:

$$Q = \min(aK, bL),$$

ahol $a, b > 0$. Láthatjuk, hogy a Leontief-féle termelési függvény állandó skálahozadékú, és az optimumban ($aK = bL$) nincs helyettesítés a tőke és munka között. Például 100 egyforma buszhoz műszakonként közelítőleg 100 sofőrre van szükség.

6.3. Költségfüggvény

Eddig nem törődtünk a termelés költségeivel, most pótoljuk ezt a hiányt. Tekintsünk egy vállalatot, amely egy órára egységnyi tőkét r kamatlábért és egységnyi munkát w órabérért tud bérelni. Ekkor a Q mennyiség előállítási költsége (6.1) mellett

$$C(K, L) = rK + wL. \tag{6.7}$$

A vállalkozó olyan (K, L) kombinációt keres, amelyre a költség minimális:

$$C(Q) = \min[rK + wL|\ Q = F(K, L)]. \tag{6.8}$$

A $C(\cdot)$ függvényt *költségfüggvénynek* nevezzük. A hagyományos közgazdaságtan nagy hangsúlyt fektet a rövid- és hosszú távú költség megkülönböztetésére: az előbbinél a tőke rögzített, az utóbbinál szabadon választható. Mi csak az utóbbit vizsgáljuk.

6.2. feladat. Határozzuk meg a Leontief-féle termelési függvényre a költségfüggvényt!

Bonyolultabb a (6.3) Cobb–Douglas termelési függvény költségfüggvénye. Először két elemileg könnyen kezelhető esetet mutatunk be.

6.3. példa. $\alpha = 1/2$ és $\beta = 1/2$, $A = 1$. Ekkor $K = Q^2/L$, azaz $c(L) = rQ^2/L + wL$. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazzuk:

$$\frac{rQ^2}{L} + wL \geq 2Q\sqrt{rw},$$

(a jobb oldal fix), és a két oldal egyenlősége éppen a két tag egyenlősége esetén valósul meg:

$$\frac{rQ^2}{L} = wL,$$

azaz

$$L(Q) = \sqrt{\frac{r}{w}}Q \qquad \text{és} \qquad K(Q) = \sqrt{\frac{w}{r}}Q.$$

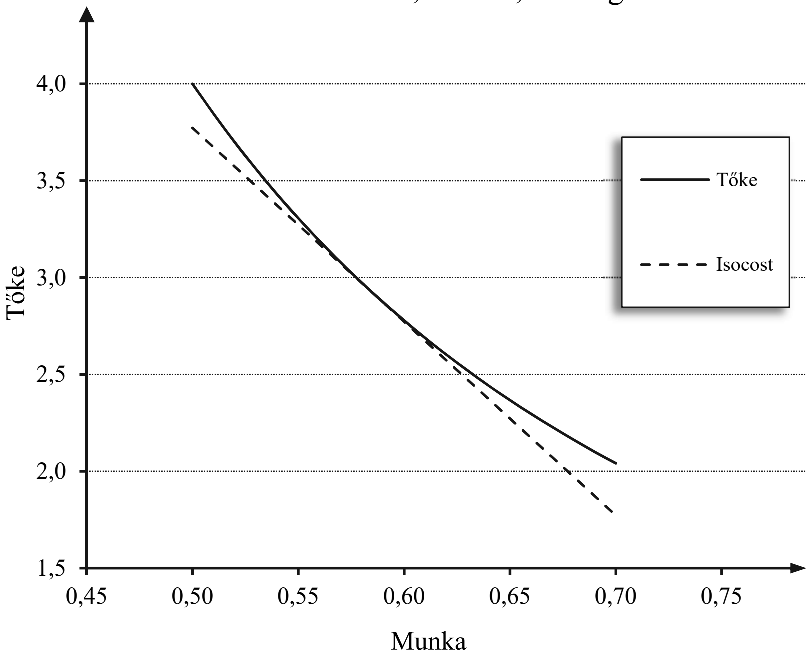
Második példánkat, amely empirikusan releváns, feladatként fogalmazzuk meg:

6.3. feladat. $\alpha = 1/3$ és $\beta = 2/3$, $A = 1$. Igazoljuk, hogy a Q kibocsátással arányos optimális munka–tőke-pár

$$L(Q) = \sqrt[3]{\frac{2r}{w}}Q \qquad \text{és} \qquad K(Q) = \sqrt[3]{\frac{w^2}{4r^2}}Q!$$

A 6.1. ábrán megcseréljük a tengelyeket, a síkban ábrázolva az adott kibocsátást nyújtó (L, K) párokat, az ún. *isocost* görbét kapjuk, a költségegyenes a költségminimum pontjában érinti a görbét. $A = 1$, $\alpha = 1/3$, $\beta = 2/3$, $r = 0{,}1$ és $w = 1$ esetén $L^{\circ} = 0{,}585$-pontban érinti a két görbe egymást. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az érintési pont jelentős környezetében alig lehet megkülönböztetni a görbét és az érintőt.

6.1. ábra. Tőke, munka, költség



Most a kalkulus alkalmazásával belátjuk az általános tételt.

6.2.* tétel. *Állandó skálahozadékú Cobb–Douglas termelési függvény esetén* ($\alpha + \beta = 1$), $A = 1$ *esetén az optimális tőke–munka kombináció*

$$L^{\mathrm{o}} = \left(\frac{(1-\alpha)r}{\alpha w}\right)^{\alpha} Q \qquad \textit{és} \qquad K^{\mathrm{o}} = \left(\frac{\alpha w}{(1-\alpha)r}\right)^{1-\alpha} Q. \tag{6.9}$$

Bizonyítás. Fejezzük ki (6.3)-ból az adott Q-hoz és L-hez tartozó K-t:

$$K(Q, L) = Q^{1/\alpha} L^{-\beta/\alpha}. \tag{6.10}$$

Behelyettesítve a kapott képletet (6.8)-ba:

$$C(Q) = \min_L c(L), \qquad \text{ahol} \qquad c(L) = rQ^{1/\alpha} L^{-\beta/\alpha} + wL.$$

A lokális minimumot a származtatott költségfüggvény deriváltjának a gyöke adja (3.4.* tétel):

$$0 = c'(L) = -r(\beta/\alpha) Q^{1/\alpha} L^{-\beta/\alpha - 1} + w.$$

Rendezve $L(Q)$-ra,

$$L^{1/\alpha} = \frac{r\beta}{w\alpha} Q^{1/\alpha},$$

ahonnan (6.10) segítségével (6.9) két képlete adódik. □

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy (optimális esetben) adott r kamatláb esetén minél nagyobb a w órabér, annál kevesebb munkát alkalmaznak, és adott w órabér esetén minél nagyobb az r kamatláb, annál kevesebb tőkét alkalmaznak. A fejlődés a kevesebb munka és a több tőke felé mutat.

Gyakorlati fontossága miatt kitérünk a következő kvadratikus költségfüggvényre:

$$C(Q) = a + bQ + cQ^2, \tag{6.11}$$

ahol $a > 0$ a fixköltség, $b > 0$ az arányos költségegyüttható és $c > 0$ az emelkedő költségek együtthatója.

6.3. tétel. *A (6.11) kvadratikus költségfüggvény mellett a $C(Q)/Q$ átlagköltség a minimumát a következő pontban veszi föl:*

$$Q^{\mathrm{o}} = \sqrt{\frac{a}{c}}. \tag{6.12}$$

Megjegyzés. Minél nagyobb az a fix költség, illetve minél kisebb a c emelkedő költség-együttható, annál nagyobb az optimális kibocsátás.

Bizonyítás. (6.11) esetén

$$\frac{C(Q)}{Q} = \frac{a}{Q} + b + cQ.$$

A számtani és a mértani közép egyenlőtlensége miatt

$$\frac{a}{Q} + cQ \geq 2\sqrt{ac},$$

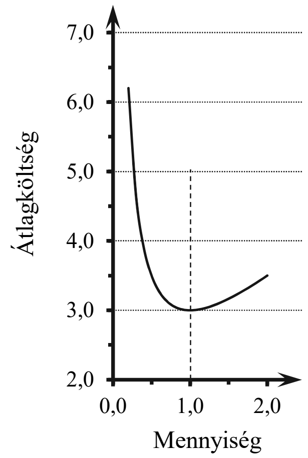
és az egyenlőség csak a két tag egyenlősége esetén valósul meg:

$$\frac{a}{Q} = cQ,$$

azaz (6.12) teljesül. □

A 6.2. ábrán szemléltetjük a $C(Q)/Q$ átlagköltség-függvényt $a = 1$, $b = 1$ és $c = 1$ esetén. Q^{o}-tól balra a görbe csökken, jobbra pedig növekszik. Ismét megjegyezzük, hogy az optimum közelében a görbe majdnem egyenes.

6.2. ábra. Átlagköltség-görbe



6.4. Profit

A vállalat *profitja* a bevétel és a költség különbsége:

$$\pi(K, L, Q) = pQ - rK - wL, \tag{6.13}$$

ahol p a termék egységára. Első látásra paradox módon a 6.2.* tétel optimumát behelyettesítve határozatlan az optimum.

Másfelé vizsgálódunk. Homogén lineáris költségfüggvényt tételezünk föl: $C(Q) = cQ$. Adott a $P(Q) = a - bQ$ lineáris inverz keresleti görbe [(4.6) inverze], és $c < a$, a a 0 keresletház tartozó maximális árat mutatja, míg b az inverz keresleti egyenes meredeksége, az a szám, amennyivel az ár csökken, ha a fogyasztás egy termékegységgel növekszik. Mekkora kibocsátást választ egy monopolista, aki egyedül látja el a piacot?

6.4. tétel. *Lineáris inverz-keresleti függvény esetén a monopolista számára az optimális kibocsátás*

$$Q_{\mathrm{M}} = \frac{a-c}{2b}. \tag{6.14}$$

Megjegyzés. Minél nagyobb a maximális ár és az egységköltség $a - c$ különbsége, illetve minél kisebb a b meredekség, annál nagyobb az optimális monopoltermelés.

Bizonyítás. A profitfüggvény a bevétel és a költség különbsége:

$$\pi(Q) = [P(Q) - c]Q = (a - c - bQ)Q. \tag{6.15}$$

A 3.1. tétel szerint a maximumot (6.14) adja. □

Visszakanyarodunk a 3. fejezetbeli játékelmélethez. Feltesszük, hogy adott piacon két vállalat verseng egymással, és egyfajta duopolista egyensúlyt keresünk (Cournot, 1838). Ismét a lineáris inverz-keresleti függvényt írjuk föl: $P(Q_1, Q_2) = a - b(Q_1 + Q_2)$ és behelyettesítjük mindkét vállalat profitfüggvényébe:

$$\pi_1(Q_1, Q_2) = [a - c - b(Q_1 + Q_2)]Q_1, \quad \pi_2(Q_1, Q_2) = [a - c - b(Q_1 + Q_2)]Q_2.$$

Mivel a két vállalat nem játszik össze, (azaz nem osztják föl a piacot), *duopolista egyensúlynak* ($n = 2$) nevezzük a (Q_1^*, Q_2^*) kibocsátáspárt, ha tetszőleges (Q_1, Q_2) kibocsátáspár esetén adott Q_2^* mellett az 1. vállalat profitja Q_1^*-ban, a 2.-é pedig adott Q_1^* mellett Q_2^*-ban maximális. Képletben:

$$\pi_1(Q_1^*, Q_2^*) \geq \pi_1(Q_1, Q_2^*) \qquad \text{és} \qquad \pi_2(Q_1^*, Q_2^*) \geq \pi_2(Q_1^*, Q_2).$$

Lineáris inverz keresleti és azonos költségfüggvények (szimmetrikus duopólium) esetén az egyensúly explicite meghatározható.

6.5. tétel. *A Cournot-féle szimmetrikus duopóliumban a két vállalat egyensúlyi kibocsátása*

$$Q_1^* = Q_2^* = \frac{a-c}{3b} = \frac{2}{3}Q_{\mathrm{M}}. \tag{6.16}$$

Megjegyzés. Vannak másféle duopóliumok is, például a Stackelberg-duopólium, de azzal majd a 8. fejezetben foglalkozunk.

Bizonyítás. Az 1. vállalat Q_2-t adottnak véve maximalizálja profitját, és a 2. vállalat Q_1-et adottnak véve maximalizálja profitját: az így adódó függvényeket *reakciófüggvénynek* vagy legjobb válasznak nevezzük. Ismét a 3.1. tétel szerint [(6.14) felhasználásával]

$$Q_1(Q_2) = Q_{\mathrm{M}} - \frac{Q_1}{2} \qquad \text{és} \qquad Q_2(Q_1) = Q_{\mathrm{M}} - \frac{Q_2}{2}. \tag{6.17}$$

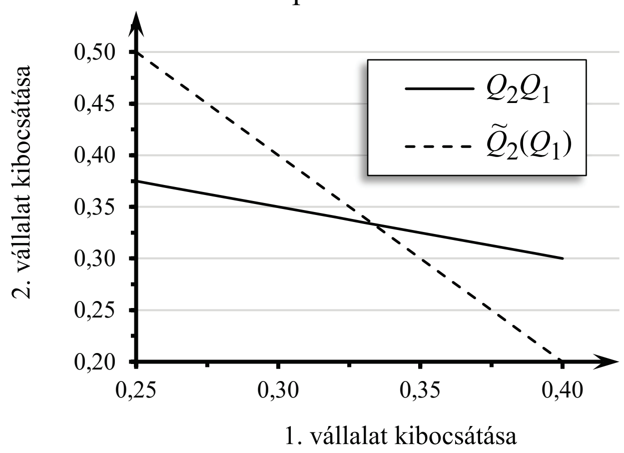
A szimmetria miatt $Q_1 = Q_2$, azaz (6.17)-ből rendezéssel adódik (6.16). □

A grafikus ábrázolás miatt az 1. reakciófüggvényt invertáljuk:

$$\tilde{Q}_2 = Q_{\mathrm{M}} - 2Q_1.$$

A 6.3. ábrán láthatjuk a (6.17)-beli reakciófüggvényeket $a = 1$, $b = 1$ és $c = 0$ esetén. A vízszintes tengelyen Q_1 változik 0,25 és 0,4 között, a metszéspont $Q_1^* = Q_2^* = 1/3$.

6.3. ábra. Két reakciógörbe duopóliumnál



Következmény. *Mivel a duopolisták együttes termelése nagyobb, mint a monopolistáé:* $Q_D = Q_1^* + Q_2^* > Q_{\mathrm{M}}$, *ezért a piaci ár alacsonyabb:* $P(Q_D) < P(Q_{\mathrm{M}})$; *tehát a duopólium jobb a társadalomnak, mint a monopólium.*

Érdekes, hogy nagyon egyszerű modellünkben egy duopolista vállalat termelése 2/3-a a monopolistáénak, de a duopolisták össztermelése 4/3-szorosa.

Újabb két feladat következik.

6.4. feladat. Határozzuk meg az aszimmetrikus duopolista egyensúlyt, azaz, amikor a költségegyütthatók különbözők: $c_1 > c_2$!

6.5. feladat. * Képzeljünk el (6.17) alapján egy időben zajló naiv alkalmazkodási folyamatot. Az egyik vállalat $t+1$-edik időszakos kibocsátása a másik vállalat t-edik időszakos kibocsátására adott *legjobb válasz*:

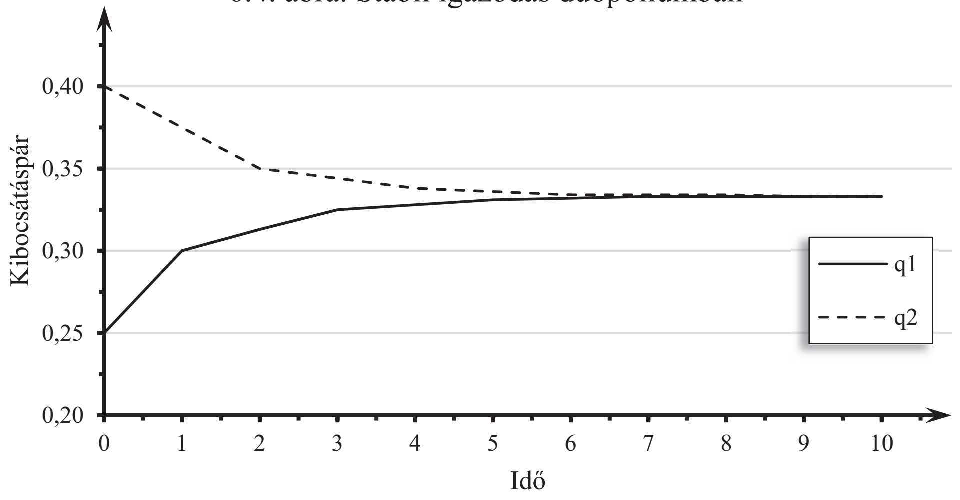
$$Q_{1,t+1} = Q_{\mathrm{M}} - \frac{Q_{2,t}}{2} \qquad \text{és} \qquad Q_{2,t+1} = Q_{\mathrm{M}} - \frac{Q_{1,t}}{2}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.17$'$}$$

ahol a $Q_{1,0}$ és a $Q_{2,0}$ kezdőérték adott.

A két időszakos késleltetésű $\hat{Q}_{i,t+1} = f(\hat{Q}_{i,t-1})$ rekurzió segítségével igazoljuk, hogy a folyamat tart a (6.16)-beli Nash-egyensúlyhoz!

A 6.4. ábrán dinamizáljuk a 6.3. ábrát. (6.17′)-ban $Q_{1,0} = 0{,}25$ és $Q_{2,0} = 0{,}4$ kezdeti érték által származtatott $Q_{1,t}$ és $Q_{2,t}$ sorozat valóban tart az $(1/3, 1/3)$ Cournot-egyensúlyhoz.

6.4. ábra. Stabil igazodás duopóliumban



Zárásul két vállalatról n vállalatra, oligopóliumra általánosítjuk a 6.5. tételt (ugyanaz a görög szógyök, az oligó, amely az „oligarchákban” szerepel). Mindenek előtt meg kell fogalmaznunk az oligopól egyensúlyt, a felfedezőjéről Nash-egyensúlynak nevezett fogalmat. Célszerű bevezetni az i-edik vállalat ellenfeleinek össztermelését:

$$Q_{-i} = Q_1 + \cdots + Q_{i-1} + Q_{i+1} + \cdots + Q_n.$$

Szerencsére lényegtelen az n vállalat kibocsátási vektora: $(Q_1, \ldots, Q_i, \ldots, Q_n)$, az i-edik vállalat profitja egyszerűen $\pi_i(Q_i, Q_{-i})$. Az oligopolista egyensúly definíciója: (Q_i^*, Q_{-i}^*), ha tetszőleges (Q_i, Q_{-i}) kibocsátáspár esetén teljesül

$$\pi_i(Q_i^*, Q_{-i}^*) \geq \pi_i(Q_i, Q_{-i}^*), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Lineáris inverz-keresleti és költségfüggvénynél az egyensúly explicite meghatározható.

6.6. tétel. *A szimmetrikus n-szereplős oligopolista egyensúlyban mindegyik vállalat egyensúlyi kibocsátása azonos, és fordítva arányos $1 + n$-nel:*

$$Q_i^*(n) = \frac{2Q_\mathrm{M}}{n+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.18}$$

Bizonyítás. Felírjuk az inverz keresleti függvényt: $P(Q_i, Q_{-i}) = a - b(Q_i + Q_{-i})$ és behelyettesítjük az i-edik vállalat profitfüggvényébe:

$$\pi_i(Q_i, Q_{-i}) = [a - c - b(Q_1 + Q_{-i})]Q_i.$$

Az i-edik vállalat Q_{-i}-t adottnak véve maximalizálja profitját. Ismét a 3.1. tétel szerint

$$Q_i(Q_{-i}) = Q_\mathrm{M} - \frac{Q_{-i}}{2}. \tag{6.19}$$

A szimmetria miatt egyensúlyban $Q_{-i} = (n-1)Q_i$, azaz (6.19)-ből rendezéssel (6.18). □

Megjegyezzük, hogy (6.18) értelmében az egyensúlyi összkibocsátás

$$Q^*(n) = nQ_1^*(n) = \frac{2n}{n+1}Q_\mathrm{M}$$

a vállalatok számával monoton növekvően tart a monopolista kibocsátás kétszereséhez:

$$Q_{\mathrm{C}}^* = 2Q_{\mathrm{M}}$$

versenyegyensúlyhoz, ahol a megfelelő ár maga az egységköltség, és a profitok eltűnnek:

$$P_{\mathrm{C}} = a - bQ_{\mathrm{C}}^* = c \qquad \text{és} \qquad \pi_1 = \cdots = \pi_n = \cdots = 0.$$

Ez a közgazdaságtan egyik legfontosabb eredménye: lineáris költségfüggvények esetén minél több szimmetrikus vállalat verseng egymással, összességében annál többet termelnek, és annál inkább megközelítik a tökéletes versenyegyensúlyt.

A 6.1. táblázat azt mutatja, hogy 1970-ben az Egyesült Államok különféle iparágaiban a négy-, illetve nyolc legnagyobb vállalat az össztermelés hány százalékát adta. A növekvő skálahozadékú iparágakban a koncentráció nagy volt, a csökkenőkben viszont kicsiny.

6.1. táblázat. Néhány iparági koncentrációs hányados, USA, 1970, %

	Négy	Nyolc
Iparág	legnagyobb vállalat súlya	
Acélipar	47	65
Autóipar	92	98
Kőolajfinomítás	33	57
Gépgyártás	7	12
Női ruhakészítés	10	13

Végül következik a

6.6. feladat. * *a)* Képzeljünk el (6.19) alapján egy időben zajló alkalmazkodási folyamatot:

$$Q_{i,t+1} = Q_{\mathrm{M}} - \frac{Q_{-i,t}}{2}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad t = 1, 2, \ldots \tag{6.19$'$}$$

ahol a $(Q_{1,0}, \ldots, Q_{n,0})$ kezdőérték adott. A $\hat{Q}_{t+1} = f_i(\hat{Q}_{t-1})$ aggregált rekurzió segítségével igazoljuk, hogy a folyamat már $n = 3$ esetén sem tart a (6.18)-beli Nash-egyensúlyhoz, kivéve ha a kezdeti eltérések összege 0!

b) Igazoljuk, hogy ha a vállalatok korrekciós tényezőt építenek be a reakcióikban, például az eltérésváltozókban 1/2-es szorzó helyett $2/n$-est alkalmaznak:

$$\hat{Q}_{i,t+1} = \frac{2\hat{Q}_{-i,t}}{n}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad t = 1, 2, \ldots \tag{6.19$''$}$$

akkor a rendszer aggregáltan (de vállalatonként is) tart az egyensúlyhoz!

7. Stabilitás, ciklus és káosz*

Dinamikus rendszerről beszélünk, ha az időben változó állapot a korábbi állapotoktól *függ*. A lineáris dinamikus rendszerek elmélete viszonylag egyszerű, különösen a skalár esetben (vö. 2.1. és 4.1–4.2 alfejezet). A linearitás azonban legtöbbször csak közelítés. A 7.1. alfejezetben nemlineáris dinamikus rendszerek stabilitását és ciklusait elemezzük, anélkül, hogy általában megadnánk explicite a pályát. A 7.2. alfejezet a káoszról szól: ez utóbbi esetben egymáshoz közelről induló korlátos pályák eltávolodnak egymástól. A 7.3. alfejezetben közgazdasági alkalmazásként a beruházási ciklus 4.4. alfejezetbeli lineáris modelljét általánosítjuk nemlineárisra.

7.1. Nemlineáris dinamikus rendszerek

Egyszerűségük miatt a dinamikus rendszerek lineáris modelljei sokszor nagyon hasznosak, de máskor túl kell lépnünk rajtuk. Például amikor olyan korlátos rendszert vizsgálunk, amely nem stabil. (A 2.1. tételből következik, hogy ilyen lineáris rendszer nincs.) Ehhez szükségünk van egy f függvényre, amely a $[0,\infty]$ szakaszt önmagába képezi le. A dinamikus rendszer mozgását, az állapotváltozást az állapotegyenlet írja le:

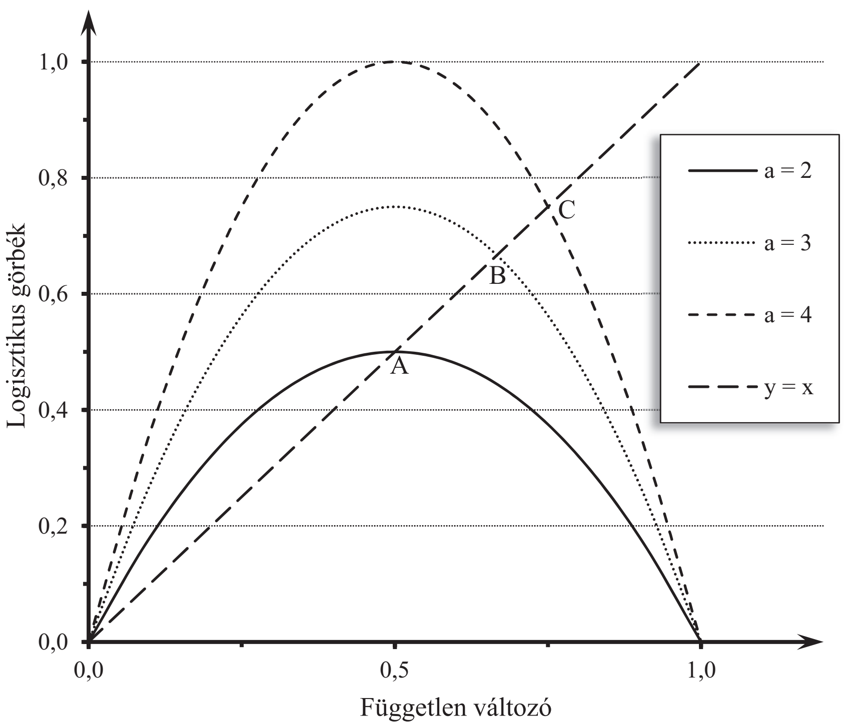
$$x_{t+1} = f(x_t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 \qquad \text{adott.} \tag{7.1}$$

7.1. példa. Az egyik legegyszerűbb nemlineáris függvény az ún. logisztikus függvény (a logisztikus görbével való kapcsolatát mellőzzük), és az általa létrehozott dinamikus rendszer:

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 \qquad \text{adott.} \tag{7.2}$$

Könnyű belátni, hogy $0 < a \leq 4$ esetén a logisztikus leképezés a $[0,1]$ szakaszt a $[0,1]$ szakaszba képezi le. A 7.1. ábra $a = 2, 3, 4$ értékre mutatja be a három logisztikus görbét, és az $y = x$ átló pedig kimetszi a három fix pontot (definícióját később adjuk meg): A-t, B-t és C-t.

7.1. ábra. Három logisztikus görbe



Feltehetjük, hogy az f függvény folytonos, szemléletesen szólva a görbét le tudjuk rajzolni a ceruza felemelése nélkül. Ezért közeli kezdőállapotokból induló pályák az 1. időszakban is közel maradnak egymáshoz. A folytonosságnak egy speciális alesetét választva, feltesszük, hogy van olyan $L > 0$ állandó, amelyre a képpontok távolsága legfeljebb L-szerese a tárgypontokénak:

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y| \qquad \text{minden} \qquad (x, y) \qquad \text{párra.} \tag{7.3}$$

A (2.1)-beli $f(x) = Ax + B$ lineáris leképezésnél (7.3)-ban $L = |A|$ elegendő.

A következő példa mutatja, hogy ez a feltevés nem minden folytonos függvényre teljesül.

7.2. példa. A $[0, 1]$ szakaszon definiált $f(x) = \sqrt{x}$ négyzetgyök-függvényre $x \approx 0$-nál (7.3) nem teljesül.

(7.1)-ben egymás után elvégezve a behelyettesítéseket, a t-edik időszak állapota elvileg egyszerű függvénye marad a kezdőállapotnak, de a 2. és a 4. fejezetben tanulmányozott lineáris esettel ellentétben, általában nincs explicit megoldás, képlettel megadható pálya. Teljes indukcióval azonban (7.3)-ból könnyen levezethető, hogy két pályára teljesül

$$|y_t - x_t| \le L^t |y_0 - x_0|, \qquad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{7.4}$$

Ha csak adott T-ig vagyunk kíváncsiak az eltérésre, akkor akármilyen nagy L értéke, (7.4) jobb oldala is korlátos marad, ha y_0 elég közel van x_0-hoz. Például $L = 2$ és $T = 10$ esetén a (7.4)-es szorzó már 1024, de ez még ellensúlyozható, azaz (7.4) bal oldala 1 alatt tartható, ha a „szomszédos” kezdőállapotok eltérése kisebb, mint $1/2^{10} \approx 0{,}001$! Ahhoz viszont, hogy akármekkora T-re korlátos maradjon az eltérés, (7.4) értelmében az $L \le 1$ egyenlőtlenséget kellene feltennünk. Megelégszünk egy lazább definícióval.

Előrejelezhetőségről beszélünk vagy azt mondjuk, hogy a rendszer *érzéketlen* az x_0 kezdőértékre, ha a hozzá megfelelően közeli kezdőállapotból induló pályák mindvégig megfelelően közel maradnak a kiinduló pályához. Például még ha 1 perc hibával mérjük a delet, akkor sem veszítjük szem elől a Nap pályáját az égbolton vagy a Föld pályáját a Nap körül. Ugyanilyen jól előrejelezhetjük az ágyúból kilőtt golyó pályáját.

Egyensúly és stabilitás

A lineáris rendszerekben bevezetett egyensúlyi helyzet általánosítható a nemlineáris rendszerekre. Képletben: x^o *egyensúlyi helyzet,* ha $x^o = f(x^o)$: azaz x^o az $f(\cdot)$-nak fix pontja. Szemléletesen belátjuk, hogy ha egy folytonos leképezés például a $[0, 1]$ szakaszt önmagába képzi le, akkor létezik legalább egy fix pontja. Hamarosan látni fogjuk, hogy adott rendszernek létezhet több egyensúlyi helyzete is (7.2. tétel).

Már a lineáris rendszer (2.1. alfejezetbeli) tárgyalásakor láttuk, hogy egy egyensúlyi helyzet vagy (aszimptotikusan) stabil, vagy instabil. Nemlineáris rendszerben az aszimptotikus stabilitáson belül meg kell különböztetnünk a lokális és a globális stabilitást. Matematikai szabatosságról lemondva, azt mondjuk, hogy az x^o egyensúlyi helyzet *lokálisan stabil*, ha minden, hozzá elég közeli kezdőállapotból induló pálya közel marad az egyensúlyhoz. *Lokálisan aszimptotikus stabil* rendszerben a közeli kezdőállapotból induló pályák nemcsak közel maradnak, hanem aszimptotikusan tartanak az egyensúlyi helyzethez. *Globálisan aszimptotikusan stabilnak* nevezzük a rendszert, ha az aszimptotikus közelítés tetszőleges kezdeti állapotra igaz. (Például a pincér tálcáján billegő pohár helyzete csak lokálisan stabil, de globálisan nem.)

Könnyű belátni, hogy a lineáris rendszerekhez hasonlóan (vö. 2.2. tétel) a nemlineáris rendszerekben is igaz a következő állítás:

7.1. tétel. *Ha egy egyensúlyi állapot stabil, akkor a (7.1) rendszer pályái érzéketlenek az egyensúlyhoz közeli kezdeti állapotra.*

Bizonyítás. Valóban, a két pálya, (x_t) és (y_t) távolsága

$$y_t - x_t = y_t - x^o + x^o - x_t$$

alapján becsülhető:

$$|y_t - x_t| \leq |y_t - x^o| + |x^o - x_t|. \tag{7.5}$$

A stabilitás miatt (7.5) jobb oldalán mindkét tag kicsi, tehát összegük is az. □

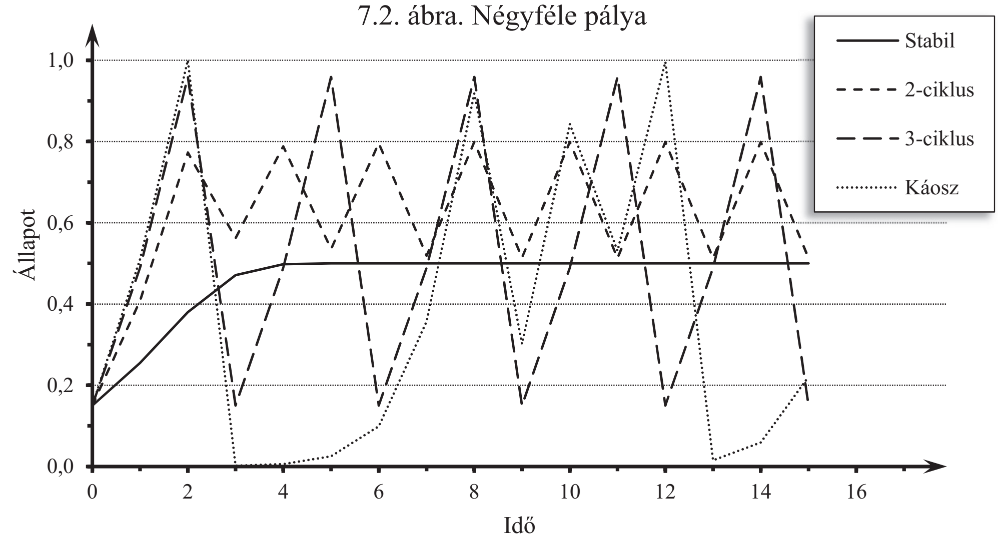
A következőkben a logisztikus leképezések paraméter-intervallumát leszűkítjük: $1 < a \leq 4$, s az itt definiált dinamika egyensúlyi helyzetét és stabilitását, illetve annak hiányát elemezzük. ($0 < a \leq 1$ érdektelen, mert minden pálya a 0-hoz tart.) Helykímélés céljából a 7.1. táblázatban közösen mutatjuk be a négy különböző paraméterértékre, de azonos kezdőértékre vonatkozó dinamikát. Az $x_t(a)$ jelölésben a a logisztikus paraméter. A pályák elnevezése csak később válik világosabbá. Előrebocsátjuk azonban, hogy az 1. pálya stabil, a 2. pálya a 2-ciklushoz tart, a 3. a 3-ciklushoz és végül a 4. pálya kaotikus. 3 tizedesjegyre kerekítettünk, és ezért követte az $x_{13}(4) = 0$-át $x_{14}(4) = 0$ helyett $x_{14}(4) = 0{,}001$!

7.1. táblázat. Különböző paraméterű logisztikus pályák

Idő t	stabil $x_t(2)$	2-ciklikus $x_t(3,2)$	3-ciklikus $x_t(3,839)$	Kaotikus $x_t(4)$
0	0,140	0,140	0,140	0,140
1	0,241	0,385	0,462	0,482
2	0,366	0,758	0,954	0,999
3	0,464	0,587	0,168	0,005
4	0,497	0,776	0,535	0,022
5	0,500	0,557	0,955	0,084
6	0,500	0,790	0,165	0,309
7	0,500	0,531	0,529	0,853
8	0,500	0,797	0,956	0,500
9	0,500	0,518	0,160	1,000
10	0,500	0,799	0,516	0,000
11	0,500	0,514	0,959	0,000
12	0,500	0,799	0,152	0,000
13	0,500	0,513	0,494	0,000
14	0,500	0,799	0,960	0,001
15	0,500	0,513	0,149	0,003

A 7.2. ábrán a táblázatban szereplő pályákat az $x_0 = 0{,}15$ eltolt kezdőállapotból indítjuk. Látható, hogy az 1–3. pálya (egyensúlyi helyzet, illetve ciklus) stabil, a 4. nem, sőt a 15. időszakbeli 0 körüli állapot helyett 0,22 valósul meg.

7.2. ábra. Négyféle pálya



Először egy elemi tételt mondunk ki, amelynek szabatos bizonyításához azonban magasabb matematikára lenne szükség.

7.2. tétel. *a) Ha egy f függvény folytonos, és a $[0,1]$ szakaszt önmagába képzi le, akkor létezik legalább egy fix pontja: $x^o = f(x^o) \in [0,1]$. b) Ha egy f függvény emellett még szigorúan növekvő és szigorúan konkáv, akkor pontosan egy fix pont létezik, és a (7.1) iteráció tart ehhez a fix ponthoz.*

Bizonyítás. *a)* Ha $f(0) = 0$ vagy $f(1) = 1$, akkor $x^o = 0$ vagy 1 fix pont. A továbbiakban kizárjuk őket. Ekkor szemléletesen magától értetődő az állítás: az $y = f(x)$ görbe az $y = x$ átló fölött indul: $f(0) > 0$, alatta végződik: $f(1) < 1$, közben legalább egy helyen metszi az átlót: $f(x^o) = x^o$.

b) Ha a leképezésnek legalább két különböző fix pontja lenne, akkor két szomszédos fix pont közti szakaszon a szigorú konkavitás nem állhatna fenn.

A szigorú konkavitás miatt igaz a következő egyenlőtlenség-rendszer:

$$\text{ha} \quad x < x^o, \quad \text{akkor} \quad x < f(x) < x^o; \tag{7.6A}$$

$$\text{ha} \quad x > x^o, \quad \text{akkor} \quad x > f(x) > x^o. \tag{7.6B}$$

Feltevés szerint igaz, hogy

$$\text{ha} \quad x_t < x^o, \quad \text{akkor} \quad x_t < x_{t+1} < x^o; \tag{7.7A}$$

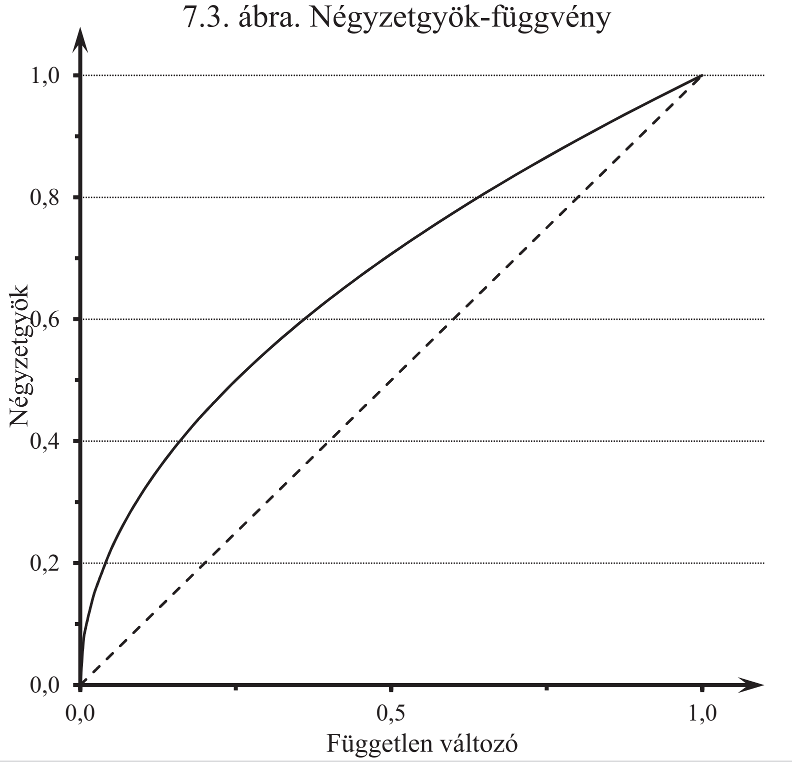
$$\text{ha} \quad x_t > x^o, \quad \text{akkor} \quad x^o < x_{t+1} < x_t. \tag{7.7B}$$

Az *A)* esetben egy felülről korlátos monoton növekvő sorozatunk van, a *B)* esetben pedig egy alulról korlátos monoton csökkenő sorozatunk van – mindkettő konvergens. A folytonosság miatt a bal és a jobb oldali határérték közös, tehát a fix pont. □

Egy példát mutatunk a 7.2. tétel alkalmazásra (vö. 7.3. ábra).

7.2. példa. (folytatás) Az $f(x) = \sqrt{x}$ egyenlet fix pontja $x^o = 1$, és ez globálisan aszimptotikusan stabil.

7.3. ábra. Négyzetgyök-függvény



A következő példa csak szellemében kapcsolódik a 7.2. tételhez.

7.3. példa. Már az ókori babilóniaiak is egy (7.1) alakú iterációs eljárással közelítették meg a $\sqrt{2}$-t tetszőleges $x_0 > \sqrt{2}$ kezdőértékkel:

$$x_{t+1} = \frac{1}{2}\left(x_t + \frac{2}{x_t}\right), \qquad t = 0, 1, \ldots. \tag{7.8}$$

Szemléletesen: minden új lépésben a 2-területű téglalapsorozat oldalai helyett számtani középüket vesszük, majd ahhoz az ismét 2 területet adó másik oldalt, s így egyre jobban közelítik a 2-területű négyzet oldalát.

7.1. feladat. Alkalmazzuk a 7.2. tétel bizonyításának gondolatmenetét a (7.8) iterációra!

Mit mondhatunk, ha f nem mindenütt növekszik? Fontos speciális esetként adódik a

Következmény. *Tegyük föl, hogy a 7.2.a tételbeli függvény csak a fix pontot tartalmazó $[0, x^*]$ szakaszon ($0 < x^{\mathrm{o}} < x^*$) növekszik, utána csökken. Az x^{o} pont ekkor is globálisan aszimptotikusan stabil.*

Bizonyítás. Elegendő az $x^* \leq x_0 \leq 1$ kezdőállapotokra szorítkozni. Mivel f itt csökken, $x_1 = f(x_0) < f(x^*) < x^*$, azaz $x_1 < x^*$, a folyamat visszatér a növekvő tartományba. □

Alkalmazzuk a 7.2. tétel következményét a logisztikus függvényre, ahol $x^* = 1/2$. (A 7.1. táblázat 1. pályája aszimptotikusan stabil, már a $t = 5$ időszakban eléri az egyensúlyi helyzetet – legalábbis az első 3 tizedes jegyben).

7.3. tétel. *a)* $1 < a \leq 4$ *esetén a (7.2) logisztikus rendszer egyensúlyi helyzete*

$$x^{\mathrm{o}} = \frac{a-1}{a} \in (0, 1).$$

b) $1 < a \leq 2$ *esetén az* $x^{\mathrm{o}} \leq 1/2$ *egyensúlyi helyzet – kivételes kezdőállapotoktól* ($x_0 = 0$ *és 1) eltekintve – globálisan aszimptotikusan stabil.*

Valójában a logisztikus leképezésnek még egy egyensúlyi helyzete van, a triviális 0 pont, ettől azonban eltekintünk. Nemcsak az onnan, de az 1-ből induló pálya is a 0-ba ugrik, és ott is marad.

Nehezebb a stabilitási elemzés, ha f a fix pont mindkét oldalán csökkenő (például a logisztikus függvénynél $2 < a < 3$). Ekkor újabb fogalmat vezetünk be. Ha (7.3)-ban $L < 1$ áll, akkor a leképezést *kontrakciónak* (zsugorításnak) nevezik, ez szavatolja az egyensúlyi helyzet egyértelműségét és globális aszimptotikus stabilitását. Pontosabban, csak heurisztikus bizonyítást adunk a 2.1. tétel nemlineáris általánosítására:

7.4.* tétel. *Ha az f leképezés a $[0, 1]$ szakaszt önmagába képzi le, és zsugorít, azaz alkalmas $0 < q < 1$-re*

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y| \qquad \textit{minden} \qquad (x, y) \qquad \textit{párra}, \tag{7.3q}$$

akkor az egyensúlyi helyzet létezik, egyértelmű és globális aszimptotikus stabil.

Megjegyzés. A 7.4.* tétel feltételei bizonyos mértékben szükségesek is. Például az $f(x) = 0,5(x+3)$ leképezés a $[0, 1]$ szakaszt az [1,5; 2] szakaszba képezi le, és természetesen nincs fix pontja. A zsugorítás már a lineáris leképezésnél is szükséges a stabilitáshoz. Az a meglepő, hogy ezek a feltételek elégségesek.

Bizonyítás. Az egyensúly létezését már a 7.2. tételben beláttuk. Az egyértelműséget ismét indirekt igazoljuk: legyen $x^{\mathrm{o}} \neq y^{\mathrm{o}}$ két fix pont: $x^{\mathrm{o}} = f(x^{\mathrm{o}})$ és $y^{\mathrm{o}} = f(y^{\mathrm{o}})$. Felírva rájuk a zsugorítási feltételt:

$$|y^{\mathrm{o}} - x^{\mathrm{o}}| = |f(y^{\mathrm{o}}) - f(x^{\mathrm{o}})| \leq q|y^{\mathrm{o}} - x^{\mathrm{o}}|.$$

Egyszerűsítve $|y^o - x^o|$-vel: $1 \leq q < 1$ – ellentmondás.

A globális stabilitást heurisztikusan igazoljuk. Tetszőleges t-edik időszakból az átmenet során az egyensúlytól való eltérés zsugorodik:

$$|x_{t+1} - x^o| = |f(x_t) - f(x^o)| \leq q|x_t - x^o|.$$

Teljes indukcióval: $|x_t - x^o| \leq q^t|x_0 - x^o|$ aszimptotikusan tart 0-hoz. □

A 7.4.* tétel alkalmazásaként adódik a

7.5. tétel. *a)* $2 < a < 3$ *esetén az* x^o *egyensúlyi helyzet – kivételes kezdőállapotoktól eltekintve – globálisan aszimptotikusan stabil, b)* $3 \leq a \leq 4$ *esetén instabil.*

Bizonyítás. *a)* Vonjuk ki egymásból az

$$x_{t+1} = ax_t - ax_t^2 \qquad \text{és} \qquad x^o = ax^o - a(x^o)^2$$

egyenletet, és vezessük be az $\hat{x}_t = x_t - x^o$ eltérésváltozót. Ekkor

$$\hat{x}_{t+1} = a\hat{x}_t - a(x_t + x^o)\hat{x}_t = (1 - ax_t)\hat{x}_t.$$

Ha $-1 < 1 - ax_t < 1$ teljesül, akkor a 7.4.* tétel értelmében igazoltuk a stabilitást. Ehhez csak azt kell feltennünk, hogy $x_0 < 2/a$, mert ebből már következik $x_{t+1} < 2/a$. A befejezést az Olvasóra hagyjuk.

b) Ha $3 \leq a \leq 4$, akkor a fix pont körül induló pályák széttartanak, hiszen $\hat{x}_t$ együtthatója kisebb, mint –1. □

Ciklusok

A természetben számos dinamikus rendszer pályája ismétlődik, azaz ciklikus (4.2. alfejezet). Például a Nap körül keringő Föld (kerekítve) 365 naponként visszatér eredeti helyzetébe. A szívverés és a légzés is periodikus. Diszkrét idejű rendszerben egy $P \geq 1$ természetes szám esetén P-ciklusról beszélünk, ha az f leképezés hatására keletkező (x_t) pálya P időszakonként *ismétlődik*, de korábban nem. Formálisan: az $(x_1, x_2, \ldots, x_P)$ vektort P-ciklusnak nevezzük, ha teljesül a következő egyenlőségsorozat:

$$x_2 = f(x_1), \qquad \ldots, \qquad x_P = f(x_{P-1}) \qquad \text{és} \qquad x_1 = f(x_P).$$

Ebből következik, hogy tetszőleges természetes k-ra $x_{Pk+r} = x_r$, $r = 1, 2, \ldots, P$. Elfajult eseteket kizárandó feltesszük, hogy a nevezett vektor minden eleme különböző.

A lineáris esetben a 2.2.–2.3. és a 4.2. alfejezetben már találkoztunk a fűrészfog-ciklussal, amely azonban szinte triviális: a kezdőállapot ismétlődik. Annál érdekesebb viszont a 7.1. táblázat 2. pályája, mert az hamar függetlenné válik a kezdőállapottól, egyébként a $t = 12$. időszakban közelítőleg visszatér a 2 időszakkal korábbi helyzetébe, és ez rendületlenül ismétlődik. Ezt fejezi ki általánosabban is a

7.6. tétel. *A (7.2) logisztikus leképezésnek pontosan egy 2-ciklusa van, ha* $3 < a \leq 4$.

Bizonyítás. Egyelőre tegyük föl, hogy valóban van 2-ciklus, jele (x_1, x_2). Ekkor igaz, hogy

$$x_2 = ax_1(1 - x_1) \qquad \text{és} \qquad x_1 = ax_2(1 - x_2).$$

Behelyettesítve a második egyenletet az elsőbe (vagy fordítva):

$$x_r = a[ax_r(1 - x_r)][1 - ax_r(1 - x_r)], \qquad r = 1, 2.$$

x_r-ben negyedfokú egyenletet kaptunk, amelynek egyik gyöke $x_3 = 0$, a másik gyöke a 7.4a. tételbeli fix pont: $x_4 = (a-1)/a$. Elhagyva az indexet, végrehajtjuk a szorzásokat, majd elosztjuk az egyenletet x-szel:

$$a^3x^3 - 2a^3x^2 + a^2(1+a)x + 1 - a^2 = 0.$$

A kapott harmadfokú egyenletet $(x - x_4)$-gyel osztva, egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$a^2x^2 - a(a+1)x + a + 1 = 0.$$

Az ismert megoldóképletet alkalmazva megkapjuk a feltételezett 2-ciklust:

$$x_{1,2} = \frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}. \tag{7.9}$$

A megadott paraméterszakaszon $0 < x_{1,2} < 1$.

Figyeljük meg, hogy ha az a paraméterrel felülről közelítjük $a = 3$-at, akkor a 2-ciklus mindkét eleme az eltűnő diszkrimináns miatt az éppen instabillá váló egyensúlyi helyzethez tart. Fordítva haladva, azt mondjuk, hogy az egyensúlyi helyzet a változásakor kettéágazik. □

Megjegyzések. 1. Magasabb matematikai eszközökkel belátható, hogy $3 < a < 1 + \sqrt{6} = 3{,}44\ldots$ esetén a kivételektől eltekintve, akármilyen kezdőállapotból indítjuk e rendszert, a pálya aszimptotikusan tart a (7.9)-ben megadott 2-ciklushoz. Az egyensúlyi állapot azonban instabil, és a pályák nagyon érzékenyen függnek az x_0 kezdőértéktől.

2. Persze, figyelembe kell venni, hogy (x_2, x_1) is geometriailag ugyanezt a 2-ciklust adja meg, mint (x_1, x_2).

7.4. példa. Ha az a paraméterérték növelése miatt a (7.9)-beli 2-ciklus instabillá válik, akkor (7.2)-nek még létezik más ciklusa is: 4, 8 stb periódussal, csak általában nincs rá explicit képletünk. A 7.1. táblázat 3. pályája egy 3-ciklushoz tart, amelynek pontjai 6 tizedes jegyre kerekítve:

$$x_1 = 0{,}149888; \qquad x_2 = 0{,}489172 \qquad \text{és} \qquad x_3 = 0{,}959299.$$

(A 7.1. táblázatban a 3-ciklus az első 15 időszakban még nem jött létre.) Sőt, ez a ciklus globálisan aszimptotikusan stabil: kivételes kezdőértékektől eltekintve, az összes pálya rátekeredik e ciklusra.

Egy meglepő tétel (Sarkovszkij, 1963) szerint a 3-ciklus létezéséből következik, hogy akármilyen $P \geq 1$ egészre P-ciklus is létezik. Persze, a 7.2. példában ezek a ciklusok a 3-ciklus kivételével instabilak.

Csak megemlítjük, a kaotikus dinamikában fellépő bonyolult, látványos halmazokat nevezte el 1975 körül Mandelbrot *fraktálnak* (magyarul törtnek, ti. a dimenziója(!) tört szám), de már 1830 körül megjelentek a matematikában, csak sokáig búvópatakként csordogáltak.

7.2. Kaotikus viselkedés matematikája

Van olyan szerző, aki már a 7.3. példát is kaotikusnak nevezi (erre utal a „3-ciklus káoszt implikál” elnevezésű Li–Yorke-tétel (1973). Mi azonban szigorúbbak vagyunk, ebben az esetben csak *átmeneti* káoszról beszélünk, hiszen véges időn belül a stabil ciklus környékére érve a további út már előrejelezhető. Igazi káoszt ad viszont a

7.7. tétel. *Az $x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$ leképezés esetén a dinamika majdnem mindenütt érzékeny a kezdőfeltételre.*

Bizonyítás. A dinamikát az $x_t = \sin^2 \varphi_t$ transzformáció segítségével vizsgáljuk meg. Felhasználva a $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ képletet, egyszerű számolással adódik $\sin^2 \varphi_{t+1} = \sin^2 2\varphi_t$, azaz elhagyva a $2\pi k$ eltéréseket ($k = 1, 2, \ldots$),

$$\varphi_{t+1} \equiv 2\varphi_t.$$

Legyen a szomszédos pálya $y_{t+1} = 4y_t(1 - y_t)$. Az $y_t = \sin^2 \psi_t$ jelöléssel,

$$\psi_{t+1} \equiv 2\psi_t.$$

A két szögdinamika eltérése $0 < \psi_t - \varphi_t < \pi$ esetén $\psi_{t+1} - \varphi_{t+1} = 2(\psi_t - \varphi_t)$ stb. az $L = 2$ korlát élessége miatt a dinamika kaotikus. □

Azt, hogy általában milyen bonyolult kérdésről van szó, jól mutatja, hogy nem tudjuk megmondani, hogy $a = 4$-en kívül mikor kapunk még kaotikus viselkedést. Csak az ismert, hogy a kaotikus pályát adó a paraméterek „sokan" vannak, és a [3,57.., 4] szakaszon helyezkednek el.

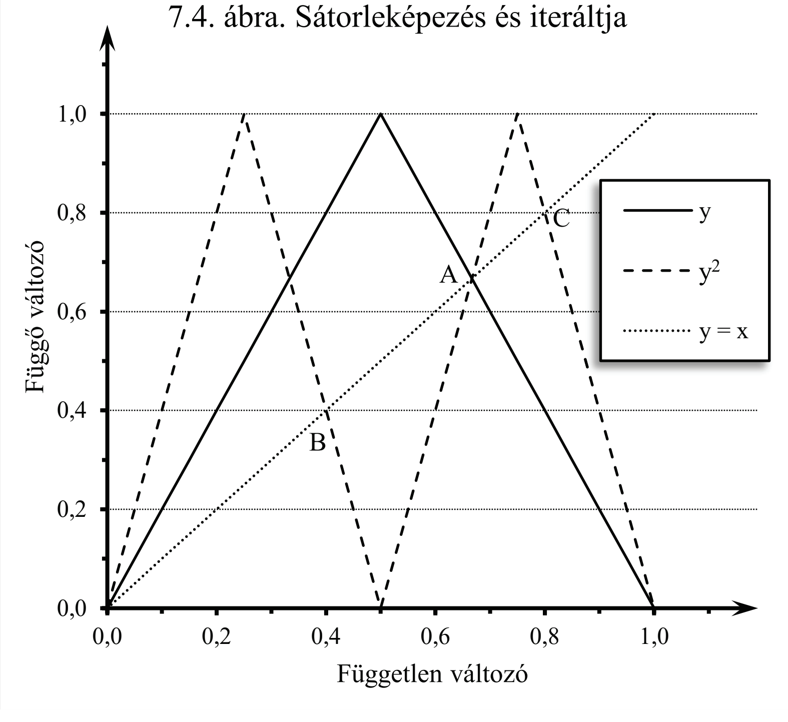
Természetesen sok más kaotikus rendszer létezik.

7.5. példa. A *sátorleképezés:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \le x \le 1/2; \\ 2 - 2x, & \text{ha } 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

A 7.4. ábra nemcsak a sátorleképezést, de az iteráltját is szemlélteti. Az átló a sátorleképezésből a fix pontot (A-t), az iteráltból a 2-ciklus 2 pontját (B-t és C-t) metszi ki.

7.4. ábra. Sátorleképezés és iteráltja



7.2. feladat. Határozzuk meg a sátorleképezés 2-ciklusát!

7.3. Határciklus és kaotikus beruházási ingadozások

Csak vázoljuk a 4.4. alfejezetbeli beruházási modell nemlineáris általánosítását, amely határciklust és kaotikus pályákat is ad. Az az alapötlet, hogy a (4.22)–(4.23) egyenlet csak terv, (p felső index utal a plan-re, a latin betű utal arra, hogy nem kitevőről van szó):

Beruházási terv

$$I_t^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{A}} + \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \tag{7.10}$$

és

Fogyasztási terv

$$C_t^{\mathrm{p}} = C^{\mathrm{A}} + \gamma Y_{t-1}. \tag{7.11}$$

Feltesszük, hogy ez a lineáris rendszer robban, s csak a beruházás alsó (I^{L}) és a fogyasztás felső korlátja tartja kordában a valóságos rendszert, ez utóbbi korlát a teljes foglalkoztatás Y^{F} felső korlátja mínusz a tényleges I_t beruházás. Képletben:

Beruházás

$$I_t = \begin{cases} I_t^{\mathrm{p}}, & \text{ha } I_t^{\mathrm{p}} > I^{\mathrm{L}}; \\ I^{\mathrm{L}}, & \text{ha } I_t^{\mathrm{p}} \leq I^{\mathrm{L}}. \end{cases}$$

és

Fogyasztás

$$C_t = \begin{cases} C_t^{\mathrm{p}}, & \text{ha } C_t^{\mathrm{p}} < Y^{\mathrm{F}} - I_t; \\ Y^{\mathrm{F}} - I_t, & \text{ha } C_t^{\mathrm{p}} \geq Y^{\mathrm{F}} - I_t. \end{cases}$$

7.6. példa. Határciklus. A 4.4. alfejezet lineáris ciklusmodelljében a kilengés nagyságát a kezdeti feltétel dönti el. Most egy olyan beruházási ciklust mutatunk be, amelyben a kilengés független a kezdeti feltételtől – határciklus.

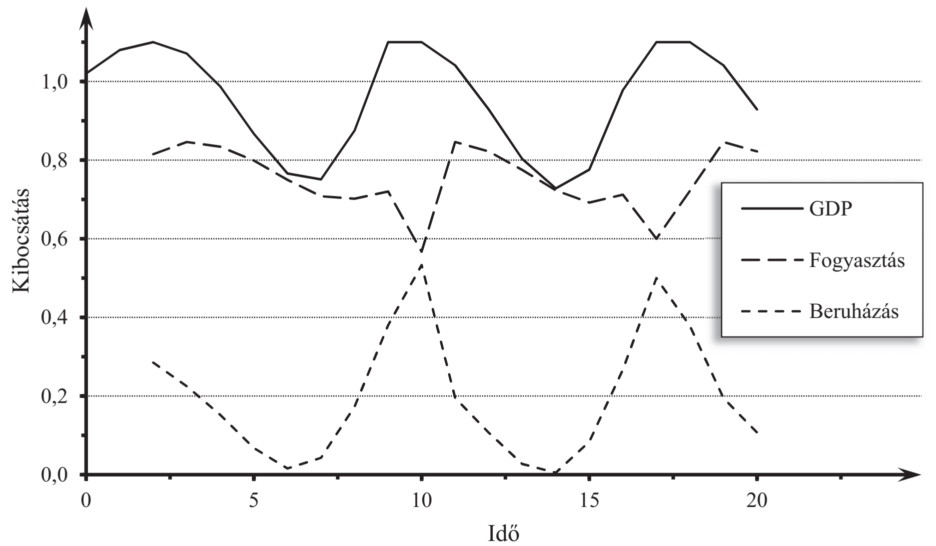
A 4.3. táblázat adataiban β-t 1-ről 1,5-re növeljük, az $I^{\mathrm{L}} = 0$ alsó korlátot és az $Y^{\mathrm{F}} = 1{,}1$ felső korlátot alkalmazzuk, az $Y_0 = 1$ és az $Y_1 = 1{,}06$ kezdeti feltételekkel. Azonnal a felső korlátba ütközve a kibocsátás csak 2 időszakot tölt ott, majd egészen 7. időszakig folyamatosan csökken, stb.

7.2. táblázat. Beruházási határciklus

Év t	GDP Y_t	Fogyasztás C_t	Beruházás I_t
0	1,000		
1	1,060		
2	1,100	0,815	0,285
3	1,100	0,845	0,255
4	1,041	0,846	0,195
5	0,929	0,822	0,107
6	0,803	0,775	0,027
7	0,728	0,723	0,005
8	0,776	0,692	0,084
9	0,978	0,712	0,267
10	1,100	0,600	0,500
11	1,100	0,722	0,378
12	1,041	0,846	0,195

A 7.5. ábrán jól eltolt kezdeti állapotokból indítjuk a rendszert: $Y_0 = 1{,}02$ és $Y_1 = 1{,}08$. A pálya gyorsan rácsavarodik a 7.2. táblázatbeli ciklusra, de eltolódással: a 2–3. időszak helyett csak a 9–10. időszakban éri el a kettős maximumot.

7.5. ábra. Eltolt beruházási ciklus



7.7. példa. Káosz. Ahhoz, hogy káoszt kapjunk, a (7.11) fogyasztási egyenletbe még két késleltetést beleteszünk:

$$C_t^{\mathrm{p}} = C^{\mathrm{A}} + \gamma_1 Y_{t-1} + \gamma_2 Y_{t-2} + \gamma_3 Y_{t-3}. \tag{7.12}$$

Az $Y^{\mathrm{F}} = 1{,}5$; $I^{\mathrm{A}} = 0{,}2$; $C^{\mathrm{A}} = 0$; $\gamma_1 = 0{,}1$; $\gamma_2 = 0{,}3$; $\gamma_3 = 0{,}4$; $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0{,}8$; $\gamma^{\mathrm{A}} = 1 - \gamma$; $I^{\mathrm{L}} = -0{,}1$; $\beta = 2{,}25$, a rendszer induló állapotvektora: $Y_{-1}(1) = Y^{\mathrm{F}}$, $Y_{-2}(1) = Y^{\mathrm{F}}$, és $Y_{-3}(1) = Y^{\mathrm{F}}$, csak $Y_{-1}(2) = Y^{\mathrm{F}} - 0{,}01$ különbözik, minimálisan. A 7.3. táblázat szerint két szomszédos pálya nagyon gyorsan távolodik egymástól, de korlátosak maradnak, néha majdnem találkoznak – kaotikusan viselkedik a rendszer.

7.3. táblázat. Kaotikus beruházási ciklus

Év t	GDP(1) $Y_t(1)$	GDP(2) $Y_t(2)$	Év t	GDP(1) $Y_t(1)$	GDP(2) $Y_t(2)$
0	1,300	1,277	10	0,898	0,913
1	1,280	1,275	11	0,888	0,904
2	1,273	1,302	12	0,906	0,919
3	1,216	1,285	13	0,958	0,964
4	1,115	1,191	14	1,039	1,033
5	1,085	1,126	15	1,136	1,116
6	1,062	1,084	16	1,227	1,195
7	1,025	1,029	17	1,283	1,244
8	0,972	0,978	18	1,278	1,239
9	0,929	0,940	19	1,192	1,165

Ebben a fejezetben diszkrét idejű skalár dinamikus rendszereket tanulmányoztuk. Megvizsgáltuk az egyensúlyi helyzet létezését és stabilitását. Példát közöltünk 2, és 3 és 8 periódusú ciklusokra. Végül bemutattunk egy olyan rendszert, amely előrejelezhetetlenül működik: kaotikusan viselkedik. A lehető legegyszerűbb rendszerekre szorítkoztunk, s általában eltekintettünk a többváltozós, több időszaki késleltetésű rendszerek elemzésétől. A folytonos idejű rendszerek vizsgálata is fontos lenne, de meghaladná kereteinket.

8. Jövedelemeloszlás, adómorál, adóztatás

Minden országban a jövedelemeloszlás többé-kevésbé egyenlőtlen, s ezt az adóztatás csak részben tompítja. A modern gazdaságban az állam jelentős adókat ró ki a vállalatokra és az egyénekre, de a befizetés (az adócsalás) foka függ az *adómoráltól*, itt egy valós szám, amely az adókulcs mellett meghatározza, mennyi jövedelmet vall be az állampolgár. Az adómorál közvetlenül nem mérhető, de létezésére és értékére következtethetünk. Minél jobb egy társadalom adómorálja, (adott adórendszer mellett) annál kevesebb jövedelmet titkolnak el az adófizetők. A 8.1. alfejezetben a jövedelem-egyenlőtlenségek mutatóit elemezzük. A 8.2. alfejezetben egy azonossággal kezdünk, amely leírja az adóbevétel függését az adókulcstól és a csalástól, egyéni optimalizálás nélkül. A 8.3. alfejezet modellje optimalizáláson alapul, amelyben az adófizető adócsalását korlátozza a szégyenérzete.

8.1. Jövedelemeloszlás egyenlőtlenségei

Ebben az alfejezetben a jövedelem-egyenlőtlenségek legegyszerűbb mutatóit szemléltetjük. Az „elméleti” részben $I > 1$ egyenlő részre osztjuk a társadalmat, és az egyes osztályok jövedeleme $y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_I$, 1-nek vesszük a jövedelmi átlagot. Ekkor $y_1+y_2+\cdots+y_I = I$.

A *medián* jövedelem a középső (egy vagy két) osztály jövedelme: $y_{\mathrm{med}} = y_{[I/2]+1}$ páratlan I esetén, és $y_{\mathrm{med}} = (y_{I/2} + y_{I/2+1})/2$ páros I esetén – ez tipikusan kisebb, mint az átlag: $y_{\mathrm{med}} < 1$. Egyszerű és jól értelmezhető mutató, de figyelmen kívül hagyja a széleket.

A *max-min hányados* a (leg)felső és a (leg)alsó osztály jövedelmi hányadosát mutatja, $h = y_I/y_1$, de figyelmen kívül hagyja a többi osztály jövedelmét.

A *szórás* legegyszerűbb mutatója az átlagtól való eltérés abszolút értékének az átlagát veszi, és azt elosztja a jövedelemátlaggal:

$$d = \frac{|y_1 - 1| + |y_2 - 1| + \cdots + |y_I - 1|}{I}.$$

Általában pozitív, és csak teljes egyenlőség esetén 0.

3-osztályú példák

Először az $I = 3$ osztályú példán szemléltetjük az egyenlőtlenséget, kezdve a szimmetrikus, és folytatva az aszimmetrikus eloszlásokkal.

Szimmetrikus eloszlás

Elméletileg a legegyszerűbb eset a *szimmetrikus* jövedelemeloszlás, ahol a medián megegyezik az átlaggal: $y_2 = 1$, és a felső jövedelem éppen annyival van az átlag fölött, mint amennyivel az alsó jövedelem az átlag alatt: $y_3 - 1 = 1 - y_1$, azaz $y_1 + y_3 = 2$.

Ekkor a max-min hányados és a szórás egyszerűen

$$h = \frac{y_1}{2 - y_1} \qquad \text{és} \qquad d = \frac{2|y_1 - 1|}{3}.$$

Számszerűsítjük mutatóinkat. 3 esetet vizsgálunk: egyenletes, mérsékelten és végletesen egyenlőtlen eloszlást. Az 1.-ben a hányados 1, a szórás 0; a 3.-ban a hányados végtelen, a szórás 0,667.

8.1. táblázat. Egyenlőtlenségi mutatók szimmetrikus eloszlás esetén, $I = 3$

Alsó	Középső	Felső	Max-min	
jövedelemharmad			hányados	Szórás
y_1	y_2	y_3	h	d
1	1	1	1	0
0,5	1	1,5	3	0,333
0	1	2	∞	0,667

Aszimmetrikus eloszlások

A valóságos jövedelemeloszlások azonban aszimmetrikusak, konkrétan jobban húznak lefelé, mint fölfelé. Háromosztályú keretünkben ezért $y_2 < 1$-gyel folytatjuk szemléltetésünket. Az előzőnél részletesebb felbontást alkalmazunk, s bár itt kihagyjuk a 0 jövedelmet, sokkal nagyobb egyenlőtlenségeket kapunk, mint a szimmetrikus eloszlásnál.

8.2. táblázat. Egyenlőtlenségi mutatók aszimmetrikus eloszlás esetén, $I = 3$

Alsó	Középső	Felső	Max-min	
jövedelemharmad			hányados	Szórás
y_1	y_2	y_3	h	d
0,75	0,75	1,50	2	0,333
0,50	0,75	1,75	3,5	0,500
0,50	0,50	2,00	4	0,667
0,25	0,75	2,00	8	0,667
0,25	0,50	2,25	9	0,833
0,25	0,25	2,50	10	1,000

Néhány magyar adat

A valóságos adatokat általában jövedelemötödökben vagy -tizedekben adják meg. A legfrissebb magyar adatokat jövedelemtizedre szerint adom meg. A legalsó tized jövedelme az átlag 32%-a, a legfelsőbbé 232%. Itt a medián jövedelemötöd az 5. és a 6. tized átlaga: kb. 88%.

8.3. táblázat. A nettó jövedelemtizedek értéke Magyarországon, 2018, átlag = 1

Jövedelemdecilisek									
Alsó	2	3	4	5	6	7	8	9	Felső
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
0,32	0,54	0,64	0,73	0,84	0,93	1,05	1,20	1,42	2,32

Kerekítéssel a szórás $d = 0{,}4$. A szórás helyett a gyakorlatban egy ahhoz hasonló, de bonyolultabb mutatót alkalmaznak, az ún. Gini-hányadost, ennek értéke 0,28 körül mozog.

Rátérünk az adócsalás modellezésére.

8.2. Adócsalás egyéni optimalizálás nélkül

Azt remélem, hogy adózási modelljeim – minden hibájuk ellenére – segítenek az adóztatás alapkérdéseinek megértésében. Külön hangsúlyozom, hogy nem foglalkozom az adómorál eredetével, adottnak veszem. Egyik modellben sincs adóhivatal, amely eseti ellenőrzéseivel feltárja az adócsalást, és büntetéssel sújtja az adócsalót. Ugyancsak figyelmen kívül hagyom, hogy az adókulcs emelése – a nettó jövedelem csökkentése miatt – többé–kevésbé csökkenti azt az időmennyiséget, amelyet adott évben az állampolgár hajlandó bejelentett munkával tölteni. Végül elsiklom afölött, hogy különböző foglalkozási ágakban különböző az adócsalás lehetősége. A 8.4. táblázatban stilizált adatok alapján feltüntetek 3–3 országot, ahol közepes, illetve erős az adómorál, viszont kicsi, közepes és nagy az állami újraelosztás. Az egyenlőtlenségek a vélelmezett jóléti sorrendet mutatják: a közepes adómorál mellett a cseh, az erős mellett a svéd rendszer tűnik optimálisnak.

8.4. táblázat. Adómorál, jövedelem-újraelosztás és jólét, 2010 körül

Újraelosztás foka Adómorál	Kicsi (kb. 30%)	Közepes (kb. 40%)	Nagy (kb. 50%)
Közepes	Szlovákia <	Csehország >	Magyaro.
Erős	Japán <	Németo. <	Svédország

A modern gazdaságokban az adók látványos szerepet játszanak: a GDP 30–60%-át is elérik. (Ebbe a számba beleértendők a GDP 5–15%-át kitevő állami nyugdíjakat fedező járulékok is, de az egyszerűség kedvéért itt nem foglalkozom velük külön.) Egyrészt az állam közjavakat (utakat, iskolákat, kórházakat stb.) építtet és működtet az adókból, másrészt a gazdagabbak befizetéseiből támogatja a szegényebbeket. Különböző országokban az adómoráltól is függően különböző mértékben titkolják el az állampolgárok adóköteles jövedelmüket. Izgalmas és fontos kérdés: az adómorált figyelembe véve mekkora adókat rójon ki az állam? A végső válasz ellentmond a naiv elképzelésnek: minél gyengébb az adómorál, annál kisebb (nem pedig nagyobb) adókulcsokat érdemes kiróni.

További egyszerűsítés: személyi jövedelemadóra (röviden: szja) szorítkozunk (reálisabb modellben további adókat, például az általános forgalmi adót is bevonnám). Fájó szívvel figyelmen kívül hagyjuk az adókedvezményeket és a magasabb adókulcsokat, s csupán egykulcsos szját modellezünk (Magyarországon 2012 óta egyébként egykulcsos az szja). Feltesszük, hogy a befolyt adót az állampolgárok között egyenlően szétosztják, s a nettó jövedelem-különbségek mérséklése fölött ez a pénz teljesen fedezi a fizetőssé tett közjavak fogyasztását.

Egy egyszerű azonossággal kezdünk, amely később hasznunkra lesz. A társadalmat különböző jövedelmű állampolgárok alkotják, a típusok száma $I > 1$ természetes szám, és az $i = 1, 2, \ldots, I$ típusú egyén jövedelme w_i, népességbeli súlya (részaránya) f_i. Ekkor az átlagos jövedelem $\mathbf{E}w = \sum_{i=1}^{I} f_i w_i = f_1 w_1 + \cdots + f_I w_I$. Az állam egykulcsos szját alkalmaz, ahol az *adókulcs* θ valós szám, $0 \le \theta \le 1$. Néha elhagyjuk a megkülönböztető i alsó indexet, azaz a w jövedelmű állampolgárnak θw adót kellene befizetnie, de tökéletlen adómorálja miatt jövedelme egy részét (e-t) eltitkolja. Már említettük, hogy a valóságot nagyon leegyszerűsítő modellünkben az adóztatás egyetlen célja: az adózás után maradó nettó jövedelme mellett mindenkinek azonos γ alapjövedelmet biztosítson. Fölteszem, hogy az (adózás előtt) átlagjövedelem éppen egységnyi, jele: $\mathbf{E}w = 1$, tehát az eltitkolt jövedelem (értsd: a teljes és a bevallott jövedelem különbsége) várható értéke $\mathbf{E}e < 1$. Mivel modellünkben az állam a teljes adóbevételét alapjövedelemként szétosztja, az alapjövedelem egyenlő az adókulcs és az átlagos bevallott jövedelem szorzatával:

$$\gamma = \theta \mathbf{E}(w - e) = \theta(1 - \mathbf{E}e). \tag{8.1}$$

8.1. példa. A nagyságrendek tisztázása érdekében célszerű a (8.1) azonosságot közelítő, kicsit sitilzált magyar adatokkal kitölteni: $\gamma = 3/8$; $\mathbf{E}e = 1/4$, tehát a képzeletbeli összesített adókulcs $\theta = 1/2$.

Eddig nem próbáltuk megmagyarázni az eltitkolt jövedelem nagyságát. Az optimális adócsalási modell eredményét megelőlegezve, most hüvelykujjszabályként feltesszük, hogy az eltitkolt jövedelem és a teljes jövedelem hányadosa az adókulcs és az adómorál (μ) hányadosa:

$$\frac{e}{w} = \frac{\theta}{\mu}, \qquad \text{azaz} \qquad e = \mu^{-1}\theta w. \tag{8.2}$$

Vigyázat, az adócsalás nagysága a (8.2)-es jövedelem-eltitkolásnak csak egy része: $\theta e = \mu^{-1}\theta^2 w$!

Számpélda: $w = 1$, $\theta = 0{,}5$ és $\mu = 2$ esetén $e = 0{,}25$ (vö. 8.1. példa).

Ahhoz, hogy a modell értelmes legyen, az eltitkolt jövedelemnek kisebbnek kell lennie a jövedelemnél, azaz $\theta < \mu$. Ahhoz, hogy ez még a maximális $\theta = 1$ adókulcsnál is fennálljon, föltesszük, hogy $\mu > 1$.

$\mathbf{E}w = 1$, (8.1) és (8.2) értelmében az adóbevétel–adókulcs-függvény

$$\gamma(\theta) = \theta(1 - \mu^{-1}\theta) = \theta - \mu^{-1}\theta^2. \tag{8.3}$$

Az államnak itt nagyon egyszerű célja van: maximalizálni akarja az adóbevételeket. A következő tétel megadja a maximális adóbevételt jelentő adókulcsot a kisebb adómorál-értékekre.

8.1. tétel. *a) Feltéve, hogy az adómorálra teljesül $1 \le \mu \le 2$, a (8.3)-beli átlagos adóbevétel akkor maximális, ha az adókulcs az adómorál fele:*

$$\theta^* = \frac{\mu}{2}. \tag{8.4}$$

b) Ekkor (8.2) esetén minden állampolgár jövedelme felét titkolja el: $e^* = w/2$, és az így adódó alapjövedelem az adómorál negyede:

$$\gamma(\mu/2) = \mu/4. \tag{8.5}$$

Bizonyítás. *a)* A 3.1. tétel jelölései szerint (8.3)-ban $A = \mu^{-1}$ és $B = 1$. Innen adódik (8.4). Mivel $\mu \le 2$, az adókulcs értelemszerűen legfeljebb 1.

b) (8.4)-et behelyettesítve (8.2)-be, majd (8.3)-ba, adódik (8.5). □

Megjegyzések. 1. Ez a modell nagyon merev, hiszen az eltitkolt és az eredeti jövedelmek aránya a kormányzati optimumban az adómorál értékétől függetlenül 1/2. Mégis, $\mu = 1$ esetén a magyar adatok közelítőleg reprodukálhatók: a $\theta = 0{,}5$ adókulcs $\mathbf{E}e = 0{,}25$ jövedelem-eltitkolást ad.

2. Sokkal egyszerűbb a nagyobb adómorálparaméterek esete: $\mu \ge 2$. Ekkor a kormányzati optimum a teljes adóztatás: $\theta^* = 1$, (8.2) értelmében a jövedelem-eltitkolás $e^* = w/\mu$, az alapjövedelem $\gamma^* = 1 - \mu^{-1}$ – mindketten az adómorál csökkenő függvényei. Sajnos, a modell rosszul van kalibrálva, de ezen túl kell lépnünk.

8.3. Optimális adócsalás

Rátérünk a bonyolultabb modellre. Most minden állampolgár optimalizálással dönt az adóeltitkolásáról, és az adóbevételek helyett az állam egy bonyolultabb *célfüggvényt* maximalizál, amely az alapjövedelem mellett valamennyire figyelembe veszi az adófizetők különböző csoportjainak célfüggvényét is. (A modern közgazdaságtanban a célfüggvény alapfogalom, s minden szereplő saját célfüggvényét maximalizálja lehetőségein belül: a fogyasztó a hasznosságot, a vállalat a profitot, és az állam jó esetben a társadalmi jólétet.) Megemlítjük, hogy itt egy olyan többszereplős dinamikus (Stackelberg-) játékról van szó, ahol a szereplők nem egyszerre lépnek: először az állam meghirdeti az adókulcsot, és erre reagálnak az állampolgárok az adócsalással.

A bevezetőben már szóltam a nagyobb fogyasztás okozta öröm és nagyobb csalás miatt érzett szégyen viaskodásáról. Ennek leírásához szükségünk van a fogyasztás és az adócsalás viszonyára is. Ha az állampolgár nem titkolná el jövedelme egy részét, akkor fogyasztása a nettó jövedelem: $(1-\theta)w$ és az alapjövedelem: $\gamma(\theta)$ összege lenne. De letagadja jövedelme egy részét: e, azaz θe adót „takarít meg”, s ezzel növeli a fogyasztását:

$$c = (1-\theta)w + \theta e + \gamma(\theta). \tag{8.6}$$

A legegyszerűbb $U(c, e)$ hasznosságfüggvényt akkor kapjuk, ha feltételezzük, hogy a kétváltozós függvény két egyváltozós függvény különbsége, és a kisebbítendő a fogyasztás homogén lineáris, a kivonandó pedig az eltitkolt jövedelem kvadratikus függvénye. Az adómorál most azt mutatja, hogy mennyire hat kedvezőtlenül az adócsalás (és a jövedelem-eltitkolás) az adózó közérzetére. Képletben:

$$U(c, e) = 2c - \mu w^{-1} e^2. \tag{8.7}$$

A 2-es szorzót a későbbi képletek egyszerűsítése végett írtuk a fogyasztás elé! A μ szorzó mellé bevettük még a w^{-1} szorzót is, mert ha A állampolgár jövedelme $\lambda(>1)$-szor nagyobb, mint B-é, akkor a λ-szoros jövedelem-eltitkolás nem λ^2-szeres, hanem csak λ-szoros szégyent okoz.

Behelyettesítve (8.6)-ot (8.7)-be, és hozzáírva a w egyedi bért. adódik az új, származtatott hasznosság:

$$U[w, e] = 2(1-\theta)w + 2\theta e + 2\gamma(\theta) - \mu w^{-1} e^2. \tag{8.8}$$

8.2. tétel. *Ha a w jövedelmű állampolgár adócsalásával a (8.8) célfüggvényt maximalizálja, akkor az optimális jövedelem-eltitkolást (8.2) adja.*

Bizonyítás. Adottnak vesszük a γ alapjövedelmet. (8.8)-ban csak $2\theta e - \mu w^{-1} e^2$ függ közvetlenül e-től. Most $B = 2\theta$ és $A = \mu w^{-1}$ szerepel a 3.1. tételben, és (8.4)-ből adódik (8.2). □

Megjegyzés. Most optimumként adódik az egyszerűbb modellben önkényesen feltételezett (8.2)-beli jövedelem-eltitkolás.

Kényszerűen feltesszük, hogy minden állampolgárnak közös (vagy legalábbis összemérhető) hasznosságfüggvénye van. Ezért megadhatunk egy ún. *társadalmi jóléti függvényt*, a Rawls-félét, amelyet John Rawls filozófusról neveztek el. E szerint a társadalom jólétét a legrosszabb helyzetű tagjának (reálisabban: tagjainak) a maximális hasznossága adja. Esetünkben ez a legkisebb jövedelmű állampolgár hasznosságfüggvényének maximuma – itt a θ adókulcs függvényében:

$$V(\theta) = U[w_{\mathrm{m}}, e^*(\theta)]. \tag{8.9}$$

8.3. tétel. *Tegyük föl, hogy az adómorál elég gyenge:*

$$1 < \mu < \mu_{\mathrm{m}} = \frac{2 - w_{\mathrm{m}}}{1 - w_{\mathrm{m}}}, \tag{8.10}$$

a) A Rawls-féle optimális adókulcs

$$\theta^* = \frac{1 - w_{\mathrm{m}}}{2 - w_{\mathrm{m}}}\mu > 0; \tag{8.11}$$

b) A (8.11)-beli $\theta^*(\mu)$ adókulcs–adómorál-függvény lineáris és növekvő, valamint az optimális jövedelem-eltitkolás mértéke független az adómoráltól:

$$\frac{e^*}{w} = \frac{1 - w_{\mathrm{m}}}{2 - w_{\mathrm{m}}} < \frac{1}{2}. \tag{8.12}$$

c) Az optimális alapjövedelem értéke

$$\gamma^* = \frac{1 - w_{\mathrm{m}}}{(2 - w_{\mathrm{m}})^2}\mu. \tag{8.13}$$

Megjegyzés. Ha $\mu \ge \mu_{\mathrm{m}}$, akkor $\theta^* = 1$, stb.

Bizonyítás. *a)* (8.9), (8.8), (8.3) és (8.2) értelmében

$$V(\theta) = 2(1 - \theta)w_{\mathrm{m}} + 2\theta\mu^{-1}\theta w_{\mathrm{m}} + 2\theta(1 - \mu^{-1}\theta) - \mu w_{\mathrm{m}}^{-1}(\mu^{-1}\theta w_{\mathrm{m}})^2.$$

Rendezve,

$$V(\theta) = 2w_{\mathrm{m}} + (2 - 2w_{\mathrm{m}})\theta - (2\mu^{-1} - \mu^{-1}w_{\mathrm{m}})\theta^2.$$

Innen már a 3.1. tétel valóban megadja a társadalmilag optimális adókulcsot.

b) és *c)* Egyszerű behelyettesítéssel. □

Megjegyezzük, hogy a bonyolult modell optimuma nulla minimális jövedelem ($w_{\mathrm{m}} = 0$) mellett az egyszerű, bevételt maximalizáló modell optimumát adja (vö. 8.1. tétel).

8.1. feladat. *a)* Igazoljuk, hogy $w_{\mathrm{m}} > 0$ esetén a Rawls-féle optimális adókulcs kisebb, mint az adómaximalizáló kulcs! *b)* Igazoljuk, hogy minél nagyobb a minimális jövedelem, annál kisebb a társadalmilag optimális Rawls-féle adókulcs!

Ezen a ponton számpéldán szemléltetjük a bonyolultabb modellt.

8.2. példa. (8.11) értelmében $w_{\mathrm{m}} = 0{,}5$ mellett a $\mu = 1{,}5$-es adómorál ad $\theta^* = 0{,}5$ adókulcsot. A (8.12) és a (8.13) képlet alapján ekkor rendre $e^* = 0{,}5/1{,}5 = 1/3$, $\gamma^* = 0{,}5 \cdot (2/1{,}5^2) \cdot 1{,}5 = 1/3$.

Végül még egy feladatot tűzünk ki.

8.2. feladat. Mindenekelőtt tekintsük a legegyszerűbb, kéttípusból álló népességet, ahol a $w_{\mathrm{m}} < 1$ jövedelműek mellett vannak $w_{\mathrm{M}} > 1$ jövedelműek is. A két típus népességbeli súlya rendre $f_{\mathrm{m}} > 0$ és $f_{\mathrm{M}} > 0$,

$$f_{\mathrm{m}} + f_{\mathrm{M}} = 1 \qquad \text{és} \qquad f_{\mathrm{m}}w_{\mathrm{m}} + f_{\mathrm{M}}w_{\mathrm{M}} = 1.$$

a) Bizonyítsuk, hogy ha a társadalmi jóléti függvényt nem Rawls, hanem a közönséges súlyozott számtani átlag szerint számoljuk:

$$W(\theta) = f_{\mathrm{m}}U[w_{\mathrm{m}}, e^*(\theta)] + f_{\mathrm{M}}U[w_{\mathrm{M}}, e^*(\theta)], \tag{8.14}$$

akkor a társadalmilag optimális adókulcs 0, s nincs jövedelem-eltitkolás: $e^* = 0$!

b) Hogyan kellene módosítani a hasznosságfüggvényt, hogy ebben az esetben is pozitív legyen a társadalmilag optimális adókulcs?

9. Népességdinamikai modellek

Az egyes országok népességének (létszámának és korösszetételének) alakulása gazdaságilag és politikailag egyaránt érdekes. Miközben a harmadik világ jelentős részében még tart a népességrobbanás, a fejlett világ egyes országaiban drámai ütemű népességfogyás és öregedés tapasztalható, ez utóbbi alól más országok (pl. Kína) sem kivételek. Például Magyarországon az 1980-as 10,7 milliós népességmaximum elérése óta ma már 10 millió alá csökkent a létszám. De ennél sokkal súlyosabb a nemzedéki (korosztályi) arányok eltolódása: jelenleg az idősek (65 éven felettiek) aránya a dolgozókurakhoz képest 25%, de 2050-re 50% várható. Nem nehéz belátni, hogy ezek a fejlemények feszültségekhez vezetnek a nyugdíj- és az egészségügy területén, bár az optimisták szerint az idősek egészségi állapotának folyamatos javulása nyomán jelentősen emelkedik majd az idősek munkakínálata, s ez enyhíti e feszültségeket (vö. 9.4. táblázat). Fontos kérdés a ki/bevándorlás, de ezzel a könyvben nem foglalkozunk.

Az eddigiekből is látható, hogy a demográfia fontos. Itt azt szeretném igazolni, hogy elméletileg is érdekes, és gazdag modellezési lehetőségei vannak. Négy modellt mutatok be. A 9.1. alfejezetben a lehető legegyszerűbben a születések és a halálozások különbségével magyarázzuk a népességszám változását. A 9.2. alfejezetben a születéseket a jelenleg dolgozók, a halálozásokat az előző időszak dolgozói létszámával magyarázzuk. A 9.3. alfejezetben a szülőképes nőkön belül megkülönböztetjük a fiatalabb és az idősebb nőket, és így kapunk érdekes eredményeket. Végül a 9.4. alfejezetben a szülési életkorok homogenizálásával és a dinamika elhanyagolásával megnyílik az út az évjárati modellek felé.

9.1. Születés és halálozás

Az 1. modell annyira egyszerű, hogy alig érdemli meg a modell nevet: az év eleji népességszám egyenlő az előző év eleji népességszám + születésszám – halálozási szám. Ha feltesszük, hogy mind a születésszám, mind a halálozásszám arányos a népességszámmal, akkor egyszerűen alakul a népességszám stb.

Bár elvileg minden pillanatban születhet egy csecsemő és meghalhat valaki, a gyakorlatban célszerűtlen évesnél finomabb bontású népességmodellekkel dolgoznunk. (Elméleti elemzésben jogosult lehet folytonos koreloszlás alkalmazása is, de az nagyon elbonyolítja a matematikai elemzést.) A legegyszerűbb demográfiai modellben nincsenek korosztályok. Éves felosztással dolgozva, jelölje a naptári éveket $t = 0, 1, \ldots$, a születések számát B_t, a halálozásokét E_t, végül a népesség év eleji értékét N_t. Könnyen belátható a már említett azonosság:

$$N_{t+1} = N_t + B_t - E_t, \qquad t = 0, 1, \ldots. \tag{9.1}$$

Ha ismerjük a (B_t) és (E_t) sorozatot, és N_0 kezdőértéket, akkor zárt országban ismert a népesség jövő év eleji értéke is.

Kicsit tovább jutunk, ha az adott évi születések és a halálozások számát arányosnak vesszük az adott év eleji népességszámmal, ahol b_t és e_t rendre a születési és halálozási arányszám:

$$B_t = b_t N_t \qquad \text{és} \qquad E_t = e_t N_t. \tag{9.2}$$

Behelyettesítve a (9.2) egyenletpárt a (9.1) egyenletbe:

$$N_{t+1} = N_t + b_t N_t - e_t N_t = (1 + b_t - e_t) N_t, \qquad t = 0, 1, \ldots. \tag{9.3}$$

Ezzel eljutottunk a legegyszerűbb demográfiai tételhez.

9.1. tétel. *a) Ha a születési arányszám adott évben nagyobb, mint a halálozási, akkor a népességszám növekszik. b) Ha a születési arányszám adott évben kisebb, mint a halálozási, akkor a népességszám csökken. c) Ha a születési arányszám adott évben azonos a halálozásival, akkor a népességszám állandó.*

Figyeljük meg, hogy a tételben nem tesszük fel, hogy a születési és halálozási arányok időben változatlanok, csak a különbségük előjeléről beszélünk. A valóságban nem is volna helyes feltenni, hogy ezek az arányok időben változatlanok, hiszen például ha egy ország népességéből eltűnnének a szülőképes nők, akkor a népesség hosszabb távon kihalásra lenne ítélve. Ideje áttérni egy reálisabb modellre. De előtte beillesztjük a 9.1. táblázatot, amely válogatott évekre tartalmazza a hazai népesség szülési, halálozási és létszám adatait. (Ha a 9.1. táblázattal akarnánk ellenőrizni az alapegyenlet érvényességét, akkor vagy minden évet fel kellett volna tüntetnünk, vagy összesíteni kellett volna az évtizedes születéseket és halálozásokat! A legutolsó évre ezt megtettük, de a jelentős természeti hiányt majdnem teljesen ellensúlyozta a bevándorlási egyenleg vagy annak számba vétele.)

9.1. táblázat. Születések, halálozások, év eleji népesség, Magyarország, ezer fő

Év t	Születési szám B_t	Halálozási szám E_t	Népesség-szám N_t
1950	195,6	106,9	9 338
1960	146,4	101,5	9 984
1970	151,8	120,2	10 338
1980	146,7	145,4	10 707
1990	125,7	145,7	10 373
2000	97,6	135,6	10 211
2010	90,3	130,5	10 000
2019	89,6	129,6	9 772
2020			9 769

9.2. Gyermekek, szülők, nagyszülők

A középiskolai keretekre való tekintettel általában az éves bontásnál jóval durvább tagolással élünk, csak 3 nemzedéket különböztetünk meg: (kiskorú) gyermekeket, szülőket és nagyszülőket. Esetenként az elemzési időszak hossza 25 év, régen ezt emberöltőnek nevezték. A naptári időszakok indexe $t = 0, 1, \ldots$. (Természetesen a gyakorlatban éves adatokkal dolgoznak a statisztikusok és a modellezők.)

Legyen a t-edik időszak átlagában a gyermekek száma K_t, a szülőké M_t és a nagyszülőké P_t. A népesség teljes létszáma

$$N_t = K_t + M_t + P_t.$$

A demográfusok megkülönböztetik a következő három *függőségi hányadost*, ahol a szülők létszámához viszonyítják a gyermekek, illetve a nagyszülők létszámát, és az eltartottak együttes létszámát.
Fiatalkori függőségi hányados

$$k_t = \frac{K_t}{M_t}. \tag{9.4}$$

Időskori függőségi hányados

$$p_t = \frac{P_t}{M_t}. \tag{9.5}$$

Teljes függőségi hányados

$$d_t = \frac{K_t + P_t}{M_t} = k_t + p_t. \tag{9.6}$$

Ezek a hányadosok mutatják, hogy milyen teher hárul a szülőkre a gyermekek és a nagyszülők eltartásában. (Az eltartás szó nem jelenti azt, hogy a gyermekek és az idősek henyélők!) Például a gazdasági fejlődés korai szakaszaiban a fiatalkori függőségi hányados nagyon nagy: 1-hez közeli, nehézzé téve a magas színvonalú kötelező iskolai képzés finanszírozását. A fejlődés késői szakaszában viszont az időskori függőségi hányados nagy: 1/2 fölötti érték, megdrágítva a nyugdíj- és egészségügyi rendszer finanszírozását. A teljes függőségi hányados viszonylag stabil. A 9.2. táblázat a magyar népesség néhány évére mutatja be e mutatók alakulását. Például 2000-ben 24 gyermek és 15 idős jutott 100 munkaképes lakosra. Érdekes, hogy 1970-ben több, mint kétszer annyi gyermek volt mint idős, míg 2050-re 3/4-re csökken az arány – legalábbis az előrejezés szerint.

9.2. táblázat. Korosztályi és függőségi hányadok alakulása Magyarországon

Év	Gyermekek	Idősek	Időskori	Teljes
	részaránya		függőségi hányad	
t	K_t/N_t	P_t/N_t	p_t	d_t
1970	0,283	0,131	0,224	0,706
2000	0,236	0,146	0,236	0,618
2050	0,189	0,262	0,477	0,821

Megjegyzés. Gyermekek: 0–19 év, idősek: 65–. 2050: előrejelzés.

Rátérünk az azonos számú évjáratból álló korosztályok modelljére. Az adott korosztály létszámcsökkenését a 0 és 1 közti, időben változó α_t és ω_t pozitív számok, az ún. *túlélési valószínűségek* határozzák meg, amelyek feltevésünk szerint adottak:

$$M_t = \alpha_t K_{t-1} \qquad \text{és} \qquad P_t = \omega_t M_{t-1}. \tag{9.7}$$

Az időben változó φ_t *termékenységi együttható* pedig kapcsolatot teremt a szülők és a gyermekek száma között:

$$K_t = \varphi_t M_t, \qquad \varphi_t > 0. \tag{9.8}$$

Megjegyezzük, hogy korábban nagy volt a gyermekhalandóság, s ezen belül a csecsemőhalandóság. Például 1911-ben hazánkban még minden ötödik újszülött meghalt 1 éves kora előtt, és még 1960-ban is minden huszadik csecsemő meghalt. Ma már a csecsemőhalandóság gyakorlatilag megszűnt. De nagy csecsemőhalandóság esetén félrevezető a (9.8) termékenységi egyenletünk. Hasonló a helyzet a szülői és a nagyszülői halandósággal.

A teljes termékenységi együttható fele (lányokra szorítkozva) általában tört szám, s ez csak úgy értelmezhető, hogy különböző termékenységű asszonyok vannak, ahol $0, 1, 2, 3$ stb. számú lányuk születik, és ezek gyakorisága időben változik, jelük $f_{0,t}, f_{1,t}, f_{2,t}, f_{3,t}, \ldots$. Képletben:

$$\varphi_t = f_{1,t} \cdot 1 + f_{2,t} \cdot 2 + f_{3,t} \cdot 3 + \cdots .$$

A rendszer dinamikájának meghatározásához meg kell adnunk két kezdőértéket: M_{-1}-et és M_0-t. Ekkor (9.7)–(9.8) segítségével meghatározható $P_0 = \omega_0 M_{-1}$ és $K_0 = \varphi_0 M_0$ stb. Valójában M_{-1}-re nincs szükségünk. Ha ismert M_0, akkor ismert K_0 is, és abból már $t \geq 1$-re minden ismert.

Drámaisága miatt a 9.3. táblázatban a stilizált (leegyszerűsített) kínai népességdinamikát szemléltetjük, halandóság nélkül: $\alpha_t = 1$ és $\omega_t = 1$. Számolási könnyebbség kedvéért a kezdőidőszak szülőinek létszámát vesszük 1 egységnek. Abszolút számokra gondolva 1950-ben Kínának körülbelül 0,5 milliárd lakója volt, jelenleg pedig körülbelül 1,4 milliárd lakója van. Ismert, hogy 1925 és 1975 között a sokgyermekes család volt tipikus Kínában. Családonként 4 gyermeket feltételezve: a féltermékenység $\varphi_0 = 2$ volt (egy család 2 felnőttből állt, a férjre és a feleségre 2–2 gyermek jutott). Aztán a Mao-ce tung halála után a kirakatpereket túlélő kínai politikusok végre valahára felfedezték, hogy egy ilyen gyorsan szaporodó népesség nem fér el Kínában, és hajtűkanyart téve, bevezették az egygyermekes családmodellt, $\varphi_1 = 0{,}5$-del. De a késleltetés miatt a népességszám egyelőre nem csökken, sőt, sokáig nőtt (9.4. táblázat). Nagyon elnagyolt modellünk 2025-ig vár, hogy Kína visszatérjen a kétgyermekes családmodellhez, de akkorra már felére csökkenne a népesség. Vidéken (különösen, ha az első gyermek lány volt), soha sem tartották be annyira szigorúan az egygyerekes törvényt, mint a városokban, és pár éve már a városokban is felhagytak vele.

9.3. táblázat. Stilizált kínai népességdinamika

Negyedszázad t	Féltermékenység φ_t	Gyermekek létszáma K_t	Szülők létszáma M_t	Nagyszülők létszáma P_t	Összesen létszáma N_t	Teljes fh. d_t
1925-	2	2	1	0,5	3,5	2,5
1950-	2	4	2	1	7	2,5
1975-	0,5	2	4	2	8	1
2000-	0,5	1	2	4	7	2,5
2025-	1	1	1	2	4	3

A 9.3. táblázat utolsó oszlopa élesen megvilágítja a kínai gazdasági csoda egyik forrását: az elmúlt évtizedekben a teljes függőségi hányados 2,5-ről ideiglenesen 1-re csökkent, de már visszatért a magas értékre.

9.1. feladat. Számolja újra a 9.3. táblázatot úgy, hogy 1975–2025 között kétgyermekes politika maradt volna érvénye, azaz $\varphi = 1$!

Jó lenne azzal vígasztalni magunkat, hogy a fejlődő világ tanultsági foka olyan gyorsan emelkedik, hogy 10–20 éven belül megszűnik a népességbomba. De Kína és India összehasonlítása mást sugall: nem nagyon lehet megkerülni az egygyerekes politikát! Elrettentésül beleteszem az ENSZ népesedési előrevetítését 2020 és 2100 között, hozzátéve az 1990-es adatokat és a területet (amelynek jelentős része gyakran lakhatatlan).

9.4. táblázat. Az ENSZ kivetítése a legnépesebb országokra

Ország	Népesség (m fő) 1990	2020	2050*	2100*	Terület (ekm2)
Bangladesh	106	165	192	151	148
Brazília	149	212	229	181	8 551
Egyesült Államok	250	331	379	434	9 834
Egyiptom	57	102	160	225	1 010
Etiópia	48	115	205	294	1 104
India	873	1 380	1 639	1 447	3 287
Indonézia	181	273	331	321	1 905
Kína	1 135	1 439	1 402	1 065	9 597
Kongói DK	35	90	194	362	2 345
Mexikó	85	129	155	141	1 973
Nigéria	95	206	401	733	924
Orosz Federáció	148	146	136	126	17 098
Pakisztán	107	221	338	403	882
Tanzánia	25	60	129	286	945
Világ-öszesen	5 288	7 795	9 735	10 875	153 000

A népességtudományban kiemelkedő szerepet játszik az ún. *stabil népesség*, amelyben a korosztályok létszámarányai állandók. Képletben [(9.4)–(9.5)]:

$$k_t = k_0 \qquad \text{és} \qquad p_t = p_0, \qquad t = 0, 1, \dots,$$

Fontos speciális eset a *stacionárius népesség*, azaz amikor nemcsak az arányok, de maguk a korosztályi létszámok is állandók. Képletben:

$$K_t = K_0, \qquad M_t = M_0 \qquad \text{és} \qquad P_t = P_0, \qquad t = 0, 1, \dots,$$

Legegyszerűbben állandó termékenységi és túlélési paraméterértékekkel lehet stabil népességeket előállítani. Tegyük föl, hogy

$$\varphi_t = \varphi, \qquad \alpha_t = \alpha \qquad \text{és} \qquad \omega_t = \omega.$$

Ekkor belátható a következő tétel.

9.2. tétel. *Állandó túlélési és termékenységi paraméterértékek esetén a népesség stabil, és a növekedési együtthatója $\nu = \alpha\varphi$. Ha $\nu = 1$, akkor a népesség stacionárius.*

Bizonyítás. Behelyettesítve $M_t = \alpha K_{t-1}$-t $K_t = \varphi M_t$-be: $K_t = \varphi\alpha K_{t-1}$, azaz a gyermekszám mértani sorozatot alkot, ν hányadossal. A $K_t = \varphi M_t$ termékenységi egyenlet alapján ugyanaz igaz a szülők létszámára is. Végül $P_t = \omega M_{t-1}$ szerint az idősek létszáma is ugyanazzal a növekedési ütemmel növekszik. □

Érdekes a függőségi hányadosok alakulása.

9.3. tétel. *Stabil népesség esetén a fiatalkori függőségi hányados $k_t = \varphi$, az időskori függőségi hányados $p_t = \omega/(\alpha\varphi)$, míg a teljes függőségi hányados $d_t = k_t + p_t$.*

Bizonyítás. A fiatalkori függőségi hányados

$$k_t = \frac{\varphi M_t}{M_t} = \varphi.$$

Az időskori függőségi hányados

$$p_t = \frac{P_t}{M_{t-1}} \frac{M_{t-1}}{M_t} = \frac{\omega}{\alpha\varphi}.$$

□

9.3. Fiatal és idős szülők

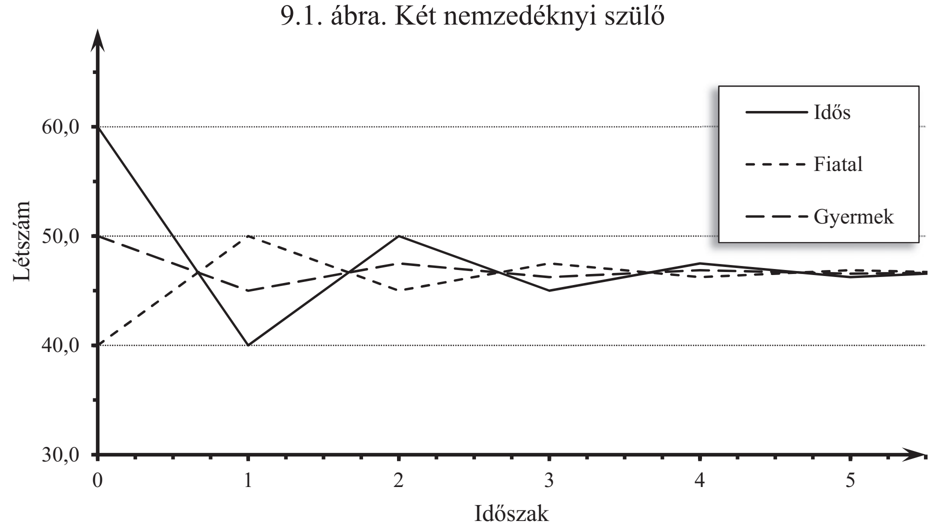
Több szempontból is érdemes módosítani az előbbi modellt, és az aktív szülők körén belül megkülönböztetni a fiatal és az idős szülőket. Ez annak felel meg, hogy a nemzedéki időszak hosszát 30 évre emeljük, s fél nemzedékekkel számolunk. Az egyszerűség kedvéért eltekintünk a termékenység és a halandóság változásától: a stabil népességre szorítkozunk. Sőt, eltekintünk a halandóságtól, és feltesszük, hogy senki sem hal meg idő előtt. Mint matematikailag felesleges toldaléktól, szintén eltekintünk az idősektől, pontosabban a terméketlen idősektől. Ha K_t a t-edik időszakban (15 éves korszak) született gyermekek száma, akkor a fiatal szülők számát K_{t-1}, az idős szülőkét pedig K_{t-2} jelöli. A 4.1. szakaszt alkalmazva, érdekes tételeket mondunk ki és bizonyítunk be. Induljunk ki a következő összefüggésből:

Termékenységi egyenlet

$$K_t = \varphi_1 K_{t-1} + \varphi_2 K_{t-2}, \qquad \varphi_1 \geq 0, \quad \varphi_2 > 0. \tag{9.9}$$

Az elemzés előtt a 9.1. ábrán szemléltetjük modellünket. Legyen $\varphi_1 = \varphi_2 = 0{,}5$ és $K_{-2} = 60\,000$ és $K_{-1} = 40\,000$. Látni fogjuk, hogy a $\varphi = 1$ termékenység miatt a népességszerkezet egy stacionárius népességhez tart.

9.1. ábra. Két nemzedéknyi szülő



Akinek jó szeme van, az láthatja, hogy a folyamat egyre kisebb kilengésekkel tart egy végállapothoz, ahol $K^* = 46\,667$. (A határérték valójában egy végtelen tizedes tört: $46\,666{,}666\ldots$, de ennek nincs gyakorlati jelentősége.)

Visszatérünk az elméleti elemzéshez. Megismételve a 4.1. alfejezet gondolatmenetét, most is mértani sorozat alakjában keressük a megoldást: $K_t = \kappa\lambda^t$, ahol κ és λ valós számok. Behelyettesítjük a feltételezett megoldást a rekurzióba:

$$\lambda^t = \varphi_1 \lambda^{t-1} + \varphi_2 \lambda^{t-2}. \tag{9.10}$$

Egyszerűsítés után a

$$\lambda^2 = \varphi_1 \lambda + \varphi_2 \tag{9.11}$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek az egyenletnek két különböző valós gyöke van, és ezek lineáris kombinációjaként adódik a megoldás. Pontosabban a következő igaz.

9.4. tétel. *a) A (9.11) rekurzió általános (kezdeti értéktől független) megoldása*

$$K_t = \kappa_1 \lambda_1^t + \kappa_2 \lambda_2^t \tag{9.12}$$

alakú, ahol $\lambda_{1,2}$ a

$$\lambda^2 - \varphi_1 \lambda - \varphi_2 = 0$$

másodfokú egyenlet két különböző valós megoldása, valamint κ_1 és κ_2 tetszőleges valós szám. b) Adott kezdeti feltételek mellett a $(\kappa_1,\ \kappa_2)$ együtthatópár egyértelműen meghatározható a következő lineáris egyenletrendszerből:

$$K_0 = \kappa_1 + \kappa_2 \qquad \text{és} \qquad K_{-1} = \kappa_1 \lambda_1^{-1} + \kappa_2 \lambda_2^{-1}. \tag{9.13}$$

Tovább finomítjuk az elemzést. Kizárjuk az atipikus $\varphi_1 = 0$ esetet. (A kizárt esetben a K_{t+1}/K_t növekedési együttható ciklikusan változik!) Általában nem igaz, hogy a népesség stabil, hiszen két különböző mértani sorozat „zavarja” egymást. (A kivételes eset $\varphi_2 = 0$!) Mivel a negatív gyök abszolút értéke kisebb, mint a pozitív gyök, még inkább áll a hatványaikra is, tehát az aszimptotikus megoldás $\kappa_1 \lambda_1^t$, $\kappa_1 \neq 0$ – azaz tágabb értelemben stabil.

Igazoltuk tehát a következő tételt.

9.5. tétel. *a) Ha $\varphi_1 > 0$, akkor a (K_t) megoldás aszimptotikusan tart a $\kappa_1 \lambda_1^t$ pályához, $\kappa_1 > 0$. b) Ha $\varphi_1 + \varphi_2 > 1$, akkor a népesség létszáma növekvő; ha $\varphi_1 + \varphi_2 < 1$, akkor a népesség létszáma csökkenő; végül ha $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, akkor a népesség létszáma állandó.*

Végül egy feladatot tűzünk ki, amely megvilágítja, hogy milyen fontos hatással van a stabil népesség növekedési ütemére az, hogy az adott termékenység hogyan oszlik meg a fiatal és az idős szülők között. Az egyszerűség kedvéért továbbra is eltekintünk az idő előtti halálozástól.

9.2. feladat. Stabil népességen belül (ahol a létszámarányok időben állandóak) rögzítjük a $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ együttes termékenységi arányszámot. *a)* Mutassuk meg, hogy csökkenő népességben ($\varphi < 1$), minél kisebb a fiatalkorú szülések aránya, annál lassabban csökken a népesség: $\nu(\varphi_1) < 1$ növekvő függvény! *b)* Igazoljuk, hogy növekvő népességben ($\varphi > 1$), minél kisebb a fiatalkorú szülések aránya, annál lassabban növekszik a népesség: $\nu(\varphi_1) > 1$ csökkenő függvény. *c)* Állandó létszámú népességben ($\varphi = 1$) a születések eloszlása közömbös: $\nu(\varphi_1) = 1$!

9.4. Egy évjárati modell

Szokás *korfáról* beszélni, amikor a vízszintes tengelyre mérjük föl a korosztályok létszámát, és a függőlegesre a korosztály életkorát, balra a nőkét, jobbra a férfiakét. Az interneten számos valóságos és képzelt korfát találhatunk. A fejezet végén bemutatunk egy továbbra is egynemű évjárati modellt, amelyben a teljes termékenységi arány (TTA) hatását vizsgáljuk a legegyszerűbb stabil népességben (ahol a korosztályok létszámaránya időben változatlan). Minden korosztály minden tagja D évig él, és F éves korában φ számú gyermeke születik – ez kb. a TTA fele. Itt φ tetszőleges pozitív valós szám. (Megismételve a korábban elmondottakat, ezt úgy lehet elképzelni, hogy a szülők $f_k > 0$ része k-as ikreket szül, ahol $k = 0, 1, 2, 3, 4$ és $f_0+f_1+f_2+f_3+f_4 = 1$, $\varphi = f_1+2f_2+3f_3+4f_4 = 1$.) Ha b_t a t-edik évben született csecsemők létszáma, akkor definíció szerint igaz, hogy

$$b_t = \varphi b_{t-F}.$$

Felhasználjuk, hogy a népesség stabil, azaz $\nu > 0$ pozitív valós számra

$$b_t = b_0 \nu^t.$$

Behelyettesítve a második egyenletet az elsőbe, egyszerűsítés után $1 = \varphi\nu^{-F}$. A következő megállapítást kaptuk.

9.6. tétel. *Stabil népességben, ahol minden felnőttnek F éves korában φ gyermeke születik, a népesség növekedési (változási) együtthatója*

$$\nu = \varphi^{1/F}.$$

Megjegyzés. Dinamikus szemléletben meg kellene adni a kezdeti feltételeket is: $b_k = b_0\nu^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots, F-1$.

Rátérünk a korszerkezet leírására. Q éves korban kezdenek el az emberek dolgozni, R évesen mennek nyugdíjba, és D évesen halnak meg. A teljes népesség, a nyugdíjasok és a dolgozók létszáma rendre (egységnyi létszámú kezdő évjáratokkal)

$$N = \sum_{a=1}^{D} \nu^{D-a}, \qquad P = \sum_{a=R+1}^{D} \nu^{D-a} \qquad \text{és} \qquad M = \sum_{a=Q+1}^{R} \nu^{D-a}. \tag{9.14}$$

Egyszerű behelyettesítéssel (és esetszétválasztással)

$$N = D, \qquad P = D - R \qquad \text{és} \qquad M = R - Q, \qquad \text{ha} \qquad \nu = 1, \tag{9.15}$$

valamint a mértani sorozat összegképletét alkalmazva

$$N = \frac{\nu^D - 1}{\nu - 1}, \qquad P = \frac{\nu^{D-R} - 1}{\nu - 1} \qquad \text{és} \qquad M = \frac{\nu^R - \nu^Q}{\nu - 1}, \qquad \text{ha} \qquad \nu \neq 1. \tag{9.16}$$

Ebből adódik a nyugdíjrendszerekben kulcsszerepet játszó időskori függőségi hányados.

9.7. tétel. *Stabil népességben az időskori függőségi hányados*

$$p = \frac{D-R}{R-Q}, \qquad \textit{ha} \qquad \nu = 1 \tag{9.17}$$

és

$$p = \frac{\nu^{D-R} - 1}{\nu^R - \nu^Q}, \qquad \textit{ha} \qquad \nu \neq 1. \tag{9.18}$$

Kiemeljük, hogy míg a (9.14)-beli összegek csak természetes számokra vannak értelmezve, addig a (9.16) mértani sorok összegképlete és (9.15), (9.17)–(9.18) tetszőleges pozitív számra is értelmes.

Eddig adottnak vettük a gyermekeket, a dolgozókat és az időseket elválasztó Q, R életkort. A következő fejezetben vizsgálandó nyugdíjrendszer működésében azonban célszerű, ha a három korosztály létszámaránya állandó.

Triviális, hogy stacionárius népesség ($\nu = 1$) esetén, ha a munkába lépési kor és a nyugdíjba vonulási kor arányosan nő a várható élettartammal: $Q = \kappa D$ és $R = \rho D$, akkor p állandó, nevezetesen
$$p = \frac{1-\rho}{\rho-\kappa}.$$
Bonyolultabb a helyzet, ha a teljes termékenységi arány 2-ről 1,5-re csökken. A 9.5. táblázatban $\kappa = 1/4$, $\rho = 3/4$, azaz $p = 1/2$, $Q = 20$ és $D = 80$, $F = 30$ év esetén φ fut 1-től 0,75-ig. Numerikus módszerrel határozzuk meg $R(\varphi)$ értékét (4. oszlop): gyorsan nő 60-ról 63,6 évre. Szemléltetésül a 2. és a 3. oszlopban megadjuk a népesség növekedési együtthatóját és a népességszámot. Az előbbi 1-ről 0,99-re csökken, az utóbbi 80-ról 56-ra.

9.5. táblázat. Teljes termékenység–népességszerkezet

Teljes termékenységi arány fele φ	Népesség növekedési együtthatója ν	Népesség (fő) N	Endogén korhatár (év) $R(\varphi)$
1,00	1,000	80,0	60,0
0,95	0,998	74,8	60,7
0,90	0,996	69,9	61,4
0,85	0,995	65,1	62,1
0,80	0,993	60,5	62,8
0,75	0,990	56,1	63,6

Mondandónk végére értünk. Bemutattunk négy népességdinamikai modellt: az 1. modellben az életkor alig játszott szerepet. A 2. modellben a szülőkorúak nem voltak megbontva, a 3. modellben ketté voltak bontva. A 2. modell viszonylag egyszerű volt, és annak elemzésekor még arra is volt módunk, hogy a túlélési valószínűségeket és az időskorúakat is figyelemmel kísérjük. A 3. modellben a másodrendű rekurzió kezelése annyira lefoglalta erőinket, hogy lemondtunk ezekről a bonyodalmakról. Megismerkedtünk viszont egy új technikával, amely elvileg lehetővé teszi, hogy tetszőleges számú korosztályra bontva elemezzük a népességdinamikai modellt. Ez azonban már felsőbb matematikai ismereteket igényelne, és a 4. modellben csak nagyon speciális feltevések mellett tudtunk e lehetőséggel élni.

10. Elemi tb-nyugdíjmodellek

A nagycsaládok felbomlásával és a fejlett társadalmak öregedésével a nyugdíjkérdés egyre fontosabbá válik. A 20. század elején főleg *tőkésített nyugdíjrendszerek* működtek, ahol a vállalatokban dolgozók ugyanúgy előre takarékoskodtak időskorukra, mint ma egy takarékos ember a karácsonyi ajándékokra. A 20. század közepén (a Nagy Válság és a II. világháború pusztítása miatt) csődbe mentek a tőkésített nyugdíjrendszerek, és helyükre léptek a társadalombiztosítási (röviden tb) nyugdíjrendszerek, amelyek általában *felosztó-kirovó* alakban működnek. Ezekben a rendszerekben az egyének kötelezően részt vesznek, és nem saját nyugdíjukra takarékoskodnak előre, hanem az éppen akkor nyugdíjasok járadékát fizetik ki. Egy társadalmi szerződésről van szó, amely a mindenkori fiatalok kötelességévé teszi a mindenkori öregekről való gondoskodást. Itt az egyén olyan *nyugdíjra* számíthat, amely a korábbi befizetéseknek, illetve – állandó járulékkulcs esetén – a bruttó életpálya-keresetének valamilyen növekvő (esetleg nemcsökkenő) függvénye.

Bemelegítésként egy stilizált példa. Hősnőnk 2019 végén töltötte be a 64. évét, és 2020 elején ment nyugdíjba, 40 éven keresztül mindig az akkori átlagbérért dolgozott, ennek nettó értéke 2019-ban majdnem 240 eFt volt. Bruttó bére (2019-ben 360 eFt) 20–30%-át a munkáltatója havonta befizette járulékként a nyugdíjalapba (egyik részét a bruttó bérből levonva, másik részét hozzáadva). A szabályok jelentős egyszerűsítésével azt mondhatjuk, hogy *kezdőnyugdíja* az utolsó havi nettó bérének 80%-a, azaz havi 192 eFt. *Életjáradékként* ezt (pontosabban ennek reálértékét) kapja egész életén keresztül – ez a *már megállapított nyugdíja.* (Ez erős felső becslés, és más okok miatt is a 2019-es átlagos nyugdíj csak 135 eFt volt– lásd még a 12. fejezetet.)

A 10.1. alfejezetben makroszinten (összevontan) vizsgálódunk, minden egyéni különbségtől eltekintünk, és a járulékkulcs, a helyettesítési arány (átlagnyugdíj/átlagkereset) és a függőségi hányados (idősek/dolgozók létszámaránya) közti kapcsolatot vizsgáljuk. A 10.2. alfejezetben mikroszinten (egyénekre alapozva) vizsgálódunk, különös tekintettel arra, hogy a nagyobb keresetűek egyben nagyobb nyugdíjúak tovább élnek, s emiatt torz *jövedelemeloszlás* alakul ki a kiskeresetű és várhatóan rövid életű egyénektől a nagykeresetű és várhatóan hosszú életűek felé.

10.1. A tb-nyugdíjrendszer makroökonómiája

Ebben az alfejezetben a *tb-nyugdíjrendszer* makroökonómiáját elemezzük, egyelőre egy adott időszakra (évre) szorítkozva. Tiszta *felosztó-kirovó* rendszer esetén minden évben a dolgozók nyugdíjjárulékainak összege (tömege) megegyezik a nyugdíjak összegével (tömegével). Mivel a járulék a dolgozó bruttó keresetének és a járulékkulcsnak szorzata, definíció szerint teljesül a következő azonosság: nyugdíjasok száma $\times$ átlagnyugdíj = járulékkulcs $\times$ dolgozók száma $\times$ átlagkereset. Bevezetjük a következő jelöléseket; a dolgozók száma: M, a nyugdíjasok száma: P, az átlagnyugdíj: b (és felidézve az u bruttó átlagkeresetet), adódik a képlet:

$$Pb = \tau M u. \tag{10.1}$$

Rendezzük át a (10.1) azonosságot:

$$\tau = \frac{b}{u}\frac{P}{M}. \tag{10.2}$$

A fejezet bevezetésében már találkoztunk a (10.2) azonosság mindkét tényezőjével, de most képlettel definiáljuk őket. Az első tényezőt *átlagos bruttó helyettesítési aránynak* nevezzük: $\gamma_u = b/u$ – ez az átlagnyugdíjnak a bruttó átlagbérhez viszonyított értéke. A második tényező neve *(rendszer)függőségi hányados* – nyugdíjasok száma/dolgozók száma. Jele: $p = P/M$. (A 9. fejezetben már találkoztunk a demográfiai függőségi hányadossal.) Tehát beláttuk a következő tételt.

10.1. tétel. *Egy tiszta felosztó-kirovó nyugdíjrendszerben a járulékkulcs egyenlő az átlagos helyettesítési arány és a rendszerfüggőségi hányados szorzatával:*

$$\tau = \gamma_u p. \tag{10.3}$$

A stilizált magyar nyugdíjrendszerben például $\gamma_u = 0{,}4$ és $p = 0{,}5$; tehát $\tau = 0{,}2$; az amerikaiban viszont $\gamma_u = 0{,}35$ és $p = 0{,}35$; tehát $\tau = 0{,}12$. Minél nagyobb a nyugdíjak relatív értéke, és minél több nyugdíjas jut egy dolgozóra, annál nagyobb járulékkulcsra van szükség. Ezt az egyszerű dolgot nagyon sok ember képtelen megérteni, és egyszerre nagyobb nyugdíjat, kisebb járulékot és alacsonyabb nyugdíjkorhatárt követel vagy ígér.

A továbbiakban a fenti azonosság jobb oldalának második tényezőjét tovább vizsgáljuk. Figyelembe vesszük, hogy a dolgozók és a nyugdíjasok száma egyaránt függ a népesség demográfiai összetételétől, a foglalkoztatási és a nyugdíjazási helyzettől. Bevezetjük a *munkarészvételi hányadot*, amely a dolgozók (M) és a munkaképesek létszámának (M^*) az aránya: $\mu = M/M^*$. Sikeres országokban a munkaképesek nagy arányban dolgoznak, sikertelen országokban viszont nem. Bevezetjük még a *nyugdíjjogosultsági hányadost* is, amely a nyugdíjasok (P) és a nyugdíjaskorúak létszámának (P^*) az aránya: $\zeta = P/P^*$: vannak olyan időskorúak, akik nem jogosultak nyugdíjra, és vannak olyan munkaképesek, akik viszont jogosultak. A 9. fejezetben már bevezettük – akkor még csillag nélkül – a *demográfiai (időskori) függőségi hányadost*, amely a nyugdíjkorúak és a munkaképesek létszámának az aránya: $p^* = P^*/M^*$. Ezek segítségével részletesebben is fölírható a mutatónk:

$$\frac{P}{M} = \frac{P}{P^*}\frac{P^*}{M^*}\frac{M^*}{M}, \tag{10.4}$$

azaz felhasználva jelöléseinket, adódik a

10.2. tétel. *Egy tisztán felosztó-kirovó rendszerben a rendszerfüggőségi hányados egyenlő a nyugdíjjogosultsági hányados és a demográfiai függőségi hányados szorzatának és a munkarészvételi hányadnak az arányával:*

$$p = \frac{\zeta}{\mu}p^*. \tag{10.5}$$

Szóban: minél több nyugdíjaskorú jut egy munkaképesre, minél kisebb a dolgozók aránya a munkaképesekhez képest, és minél nagyobb a nyugdíjasok aránya a nyugdíjaskorúakhoz képest, annál nagyobb a rendszerfüggőségi hányados.

A további elemzéshez vezessük be a következő mutatókat! Nettó/bruttó bér hányadosa: $\psi = v/u$, GDP: Y, *egy dolgozóra jutó GDP*: $y = Y/M$, *nettóbér-hatékonyság*: $\eta_v = y/v$

– ez az egy főre jutó GDP és az átlag nettó bér arányát mutatja. A hagyományos elemzésben a nyugdíjkiadások GDP-hányada kiemelkedő szerepet játszik. Ennek értéke a nyugdíjjogosultság kiterjesztésével és a bérhez viszonyított értéke emelkedésével nőtt, de országonként ma is eltérő. Az angolszász országokban (Egyesült Államok, Nagy-Britannia stb.) alacsony, 5% körüli (ott magánnyugdíjak egészítik ki a jobb módúak tb-nyugdíját, vö. 11.1. táblázat). Az európai országok zömében (Németországban, de hazánkban is) 10% körüli, de szélsőséges esetekben akár 15%-ot is elérheti (Olaszország).

Az előzőhöz hasonló módon kifejezhető a *nyugdíjkiadás aránya a GDP-ben*, ha felbontjuk a

$$\frac{Pb}{My} \tag{10.6}$$

kifejezést:

10.3. tétel. *A nyugdíjkiadás GDP-hányada egyenlő a rendszerfüggőségi hányados és az átlagos nettó helyettesítési arány szorzatának, valamint a nettóbér-hatékonyságnak a hányadosával:*

$$\frac{B}{Y} = \frac{p\gamma_v}{\eta}, \qquad \text{ahol} \qquad \gamma_v = \psi\gamma_u. \tag{10.7}$$

Szóban: minél több nyugdíjas jut egy dolgozóra, minél jobban pótolja a nyugdíj a kieső keresetet, és minél kisebb a bérek részesedése az egy lakosra jutó össztermékből, annál nagyobb a nyugdíjkiadás GDP-hez viszonyított értéke.

A 10.1. táblázat a magyar gazdaság nettó kereseti adatain szemlélteti a fentieket, a 20. század utolsó harmadának néhány évére (nincsenek frissebb összehasonlítható adataim).

10.1. táblázat. Nyugdíjak a magyar gazdaságban 1970–1996, %

Év	Nyugdíj-kiadási $100B/Y$	Jogosult-ság 100ζ	Időskori függőség $100p$	Nettó helyette-sítés $100\gamma_{\mathbf{v}}$	Részvétel 100μ	Nettó bérhaté-konyság $100\eta_{\mathbf{v}}$
1970	3,5	66,7	38,7	37,5	91,2	305,1
1975	5,0	82,1	37,3	45,4	87,8	315,1
1980	6,9	93,0	38,2	54,7	87,3	320,1
1985	7,9	100,0	40,4	61,2	86,9	358,7
1990	8,8	109,9	41,8	66,2	86,4	398,4
1994	10,0	115,6	41,1	59,5	65,8	430,2
1996	8,9	119,2	40,7	58,9	64,0	504,5

Láthatjuk, hogy 1970 és 1996 között milyen gyorsan nőtt a nyugdíjjogosultság: 67-ről 119%-ra; és milyen gyorsan csökkent a munkarészvételi hányad: 91%-ról 64%-ra. (Az első folyamat egyrészt biztosította a társadalmi békét az átalakulás során, ugyanakkor aláásta a nyugdíjrendszer hosszú távú fenntarthatóságát.) Vegyük észre, milyen látványosan nőtt a nettó keresethez viszonyított nyugdíj 1970 és 1990 között: 37,5%-ról 66,2%-ra. Ismerve, hogy a nyugdíjak szórása még a keresetek szórásánál is jóval kisebb volt, a számpár azt mutatja, hogy jelentősen csökkent az időskori szegénység: a nyugdíjas nem szorult rá a gyermekei filléreire, sőt, ő tudott segíteni gyermekeinek. Vegyük figyelembe azonban a táblázat utolsó oszlopát, ahonnan leolvasható, milyen mértékben maradt el az átlagos nettó kereset az egy lakosra jutó termeléstől – részben a járulék-elkerülés miatt.

10.1. feladat. Ellenőrizze saját számítógépes programmal a 10.1. táblázat B/Y oszlopát!

10.2. A tb-nyugdíjrendszer mikroökonómiája

Ebben az alfejezetben a tb-nyugdíjrendszer mikroökonómiáját vizsgáljuk. Először a rugalmas korhatárt modellezzük, majd a jövedelemfüggő élettartamot vizsgáljuk.

Rugalmas korhatár

Megismételjük a 9. fejezetben bevezetett jelöléseinket. Legyen Q a munkába lépés kora, R a nyugdíjba vonulás kora és D a halálozás kora: $0 < Q < R < D$, valós számok. Ha eltekintünk az inflációtól (mértékéről lásd később a 12.1. táblázatot) és az inflációt kiszűrő reálkeresetek, illetve a reálnyugdíjak emelkedésétől, akkor az u bruttó kereset és az *eszmei számlán* alapuló b nyugdíj között a következő összefüggés áll fönn:

$$(D-R)b(R) = \tau u \cdot (R-Q). \tag{10.8}$$

(A szorzójelet most azért tettük ki, hogy világossá tegyük: nem függvényről van szó.) Valóban, a dolgozó $R-Q$ évig fizet évente τu járulékot (életpálya-befizetés), míg a nyugdíjas $D-R$ éven keresztül kap évi $b(R)$ nyugdíjat (életpálya-nyugdíj). Ezért az eszmei számlás nyugdíj a következőképp függ a nyugdíjba vonulás korától:

$$b(R) = \frac{\tau u \cdot (R-Q)}{D-R}, \qquad R_{\mathrm{m}} \le Q < D, \tag{10.9}$$

ahol R_{m} a minimális nyugdíjkorhatár.

Látható, hogy a függvény egy hiperbola, két szélső értéke $b(R_{\mathrm{m}}) = b_{\mathrm{m}}$ és $b(D) = \infty$. Deriválással elegáns képletet adunk a $b(R)$ függvény százalékos emelkedéséről, de a beavatatlan Olvasó rögtön a 10.2. táblázatra ugorhat. Mindenekelőtt bevezetjük az $x(t)$ függvény *relatív változási sebességét*:

$$\frac{dx(t)}{x(t)dt}. \tag{10.10}$$

Igaz a

10.4.* tétel. *a) A függvény relatív változási sebességét logaritmikus deriváltja adja:*

$$\frac{dx(t)}{x(t)dt} = \frac{d\log x(t)}{dt}.$$

b) Az $y(t)/z(t)$ hányadosfüggvény relatív változási sebessége a számláló és a nevező relatív változási sebességének a különbsége:

$$\frac{d[y(t)/z(t)]}{[y(t)/z(t)]dt} = \frac{dy(t)}{y(t)dt} - \frac{dz(t)}{z(t)dt}.$$

Bizonyítás. *a)* Először vázoljuk, hogy a természetes alapú $\log x$ függvény deriváltja $1/x$. Felírjuk a megfelelő különbségi hányadost, és fordított irányban felhasználjuk, hogy a hányados logaritmusa = számláló logaritmusa – nevező logaritmusa:

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log(1+h/x)}{xh/x} = \frac{\log(1+h/x)}{h/x}\frac{1}{x}.$$

A 6.1. segédtétel következményében már láttuk, hogy $\log(1+u) \approx u$, ha $u \approx 0$. Mivel kis h-ra h/x is kicsiny, a különbségi hányados közelítőleg $1/x$, stb.

Innen az összetett $\log x(t)$ függvény deriváltja $\log = f$ és $x = g$ szereposztásban a

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt}$$

láncszabály szerint éppen a bizonyítandó egyenlőség bal oldala.

b) Mivel $\log[y(t)/z(t)] = \log y(t) - \log z(t)$, ezért *a)* összefüggést oda-vissza alkalmazva

$$\frac{d[y(t)/z(t)]}{[y(t)/z(t)]dt} = \frac{d}{dt}\log(y(t)/x(t)) = \frac{d}{dt}\log y(t) - \frac{d}{dt}\log z(t) = \frac{dy(t)}{y(t)dt} - \frac{dz(t)}{z(t)dt}.$$

□

Ezt alkalmazva (10.9)-re $t = R$, $y = R - Q$ és $x = D - R$ szereposztásban, adódik a

Következmény*. *Az eszmei számla esetén a nyugdíj–nyugdíjéletkor-függvény relatív változási sebessége a munkában és a nyugdíjban töltött időszakok hosszának reciprok összege:*

$$\frac{db(R)}{b(R)dR} = \frac{1}{R-Q} + \frac{1}{D-R}. \tag{10.11}$$

A 10.2. táblázat numerikusan szemlélteti a nyugdíj növekedését a *nyugdíjba vonulási kor* növekedésekor. $Q = 24$, $D = 80$ év, $v = 1$, $u = 1{,}5$ és $\tau = 0{,}22$. De (10.11)-ből számítógép nélkül is látható, hogy például az általános korhatár $R = 64$ évnél az éves jutalom $0{,}025 + 0{,}0625 = 0{,}0875$ – a második érték az ún. bónusz – jól közelíti a szokásos értékeket.

10.2. táblázat. Nyugdíj/nettó bér a nyugdíjba vonulási kor függvényében

Nyugdíjba vonulási kor R	Nyugdíj/nettó bér $b(R)$	Százalékos növekedés $b'(R)/b(R)$
62	0,697	–
63	0,757	0,087
64	0,825	0,090
65	0,902	0,093
66	0,990	0,098

A gyakorlatban azonban (10.9)-ben nem az egyedi, hanem az átlagos várható élettartam szerepel: $\mathbf{E}D$, azaz az eszmei számla szerint

$$b^{\mathrm{N}}(R) = \frac{\tau u \cdot (R-Q)}{\mathbf{E}D - R}, \qquad \text{ahol} \qquad R < \mathbf{E}D. \tag{10.12}$$

A gondolatmenetben azonban még így is marad egy elhanyagolás: a választott életkor nemcsak a munkaszeretettől függ, hanem az egészségi állapottól is. Ismert, bár nem eléggé, hogy normális nyugdíjrendszerben minél később megy nyugdíjba valaki, annál tovább él. (Magyarázat: ha valaki egészséges, akkor szívesen tovább dolgozik, és egyébként sokáig él.) Ezért (10.12) helyett tompítottabb nyugdíjszabályt kell alkalmazni: a (10.12) által sugalltnál kevésbé kell jutalmazni a később nyugdíjba vonulókat.

10.2. feladat. Legyen $z^{\mathrm{N}}(D,R)$ az D élettartamú dolgozók életpálya-befizetéseinek és eszmei számla kifizetéseinek az egyenlege:

$$z^{\mathrm{N}}(D,R) = \tau u \cdot (R-Q) - b^{\mathrm{N}}(R)(D-R). \tag{10.13}$$

a) Igazoljuk, hogy az eszmei nyugdíjszámla esetén $z^{\mathrm{N}}(D,R) = b^{\mathrm{N}}(R)(\mathbf{E}D - D)$!

b) Tegyük föl, hogy két típus van, a várhatóan rövid, illetve hosszú életű: $D_1 < \mathbf{E}D < D_2$, f_1 és f_2 valószínűséggel és $Q < R_1 < R_2$. Igazoljuk, hogy a várható életpálya-egyenleg negatív:

$$\mathbf{E}z^{\mathrm{N}} < 0!$$

Jövedelemtől függő élettartam

Más dimenzió tárul föl, ha feltesszük, hogy a dolgozók azonos korban mennek nyugdíjba, de az ekkor várható élettartamuk meredeken növekvő függvénye az életpálya-keresetnek. Erre vonatkozik a 10.3. táblázat, ahol növekvő nyugdíj szerint négy negyedre osztjuk a 2012-ben elhunyt magyar férfi nyugdíjasokat, és 100-nak vesszük utolsó évi átlagos nyugdíjukat. Például a legszegényebb férfi nyugdíjas negyed (az átlagnyugdíj 62%-ából) csak 17 évet él, míg a leggazdagabb negyed (az átlagnyugdíj 152%-ából) 21 évet.

10.3. táblázat. Nyugdíj és a 60 évesen várható élettartam, magyar férfiak, 2012

Nyugdíjosztály i	Relatív nyugdíj b_i	Várható élettartam (év) T_i
1	61,9	17,1
2	81,1	18,3
3	105,0	19,5
4	152,0	21,1
Átlag	100	19,0

A további számolás leegyszerűsítése kedvéért tegyük föl, hogy a dolgozók életpálya-keresete kortól független, de egymástól eltér. Eltekintünk attól, hogy minden tb-nyugdíj-rendszerben jövedelem-újraelosztás megy végbe a férfiaktól a nőkhöz. A dolgozók azonos korban mennek nyugdíjba, és az ekkor várható élettartamuk növekvő függvénye a keresetnek. Legyen egy adott dolgozói típus bruttó életpálya-keresete $u > 0$, közös munkába lépési koruk Q, nyugdíjazási koruk R, és nyugdíjba vonuláskor várható élettartamuk $e(u) = \mathbf{E}(D|u) - R$, az összes dolgozóra vetített várható értéke e. Ha a járulékkulcs τ, akkor most is érvényes a 10.1. feladatban bevezetett, de a bruttókeresettel arányos életpálya-egyenleg:

$$z(u,R) = \tau u \cdot (R-Q) - b(u,R)e(u). \tag{10.13$'$}$$

Két ok miatt módosítani kell az N felső indexszel jelölt hagyományos eszmei számlát [(10.12)], (i) jelölni kell a keresetek hatását:

$$b^{\mathrm{N}}(u,R) = \frac{\tau u \cdot (R-Q)}{e}, \tag{10.14}$$

és (ii) a keletkező átlaghiányt elkerülendő, egységesen $\gamma > 0$ tényezővel szorozzuk be és A felső indexszel különböztetjük meg N-től:

$$b^{\mathrm{A}}(u,R) = \frac{\gamma \tau u \cdot (R-Q)}{e}, \tag{10.15A}$$

10.3. feladat. *a)* Igazoljuk, hogy a korrekciós tényező egyensúlyi értéke

$$\gamma^{\mathrm{A}} = \frac{e}{\mathbf{E}[ue(u)]}! \tag{10.16A}$$

b) Arányosnak véve a nyugdíjakat és a bruttó kereseteket, számítsuk ki a korrekciós tényező értékét a 10.3. táblázat adataival!

A következő (10.6.) tétel segítségével igazolni fogjuk, hogy $\mathbf{E}[ue(u)] > 1$, azaz $\gamma^{\mathrm{A}} < 1$. A tétel $n > 1$ tagból álló, pozitív elemű és szigorúan növekvő sorozatpárra vonatkozik:

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \qquad \text{és} \qquad 0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n. \tag{10.17}$$

10.6. tétel. *(Csebisev összegegyenlőtlensége, 1882). A (10.17) feltevés mellett igaz, hogy a kéttényezős szorzatok számtani közepe nagyobb, mint a két számtani közép szorzata:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i > \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \tag{10.18}$$

A bizonyításhoz szükség lesz egy segédtételre, némileg általánosabb alakban megfogalmazva az egyenlőtlenséget. Legyen j_i az $(1,\dots,n)$ számok permutációja, azaz $(1,\dots,n)$ számok sorrendjének valamilyen megváltoztatása. (Például ha teljesen megfordítjuk az eredeti sorrendet, akkor $j_i = n - i + 1$.)

10.1. segédtétel. *(10.17) esetén*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i > \sum_{i=1}^{n} a_i b_{j_i},$$

ahol a (j_i) permutációban legalább egy szám helyet vált.

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy például $j_1 = 2$ és $j_2 = 1$. Ekkor igaz, hogy

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 > a_1 b_2 + a_2 b_1, \qquad \text{mert} \qquad (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) > 0.$$

Megismételve az eljárást, a jobb oldal egészen addig növekszik, amíg el nem tűnnek a cserék. □

A tétel bizonyítása. Bevezetve az $a_{n+i} = a_i$ és a $b_{n+i} = b_i$ jelöléspárt, és kihasználva a két sorozat monotonitását, a segédtétel miatt igaz a következő egy egyenlőség és $n-1$ egyenlőtlenség:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i > \sum_{i=1}^{n} a_i b_{i+1},$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i > \sum_{i=1}^{n} a_i b_{i+n-1}.$$

Összeadva az egyenletet és az egyenlőtlenségeket, a kapott egyenlőtlenség jobb oldalán minden $a_i b_j$ szorzat pontosan egyszer jelenik meg. Elosztva mindkét oldalt $1/n^2$-tel, adódik (10.18). □

A (10.17) feltevés tükörképe a következő: (a_i) szigorúan növekvő és (b_i) szigorúan csökkenő sorozat:

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \qquad \text{és} \qquad b_1 > b_2 > \cdots > b_n > 0. \tag{10.19}$$

Következmény. *(10.19) esetén a kéttényezős szorzatok számtani közepe kisebb, mint a számtani közepek szorzata:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i < \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \tag{10.20}$$

10.4. feladat. A (10.18) egyenlőtlenségnek van egy tréfás változata. Képzeljük el, hogy

500, 1 000, 2 000, 5 000, 10 000, 20 000

forintos bankjegyek vannak kirakva egy asztalra, 6 homogén oszlopba. Rád van bízva, hogy melyik oszlopból veszel ki 1 -et, 2-t, 3-at, 4-et, 5-öt és 6-ot. Mikor kapod a legnagyobb összeget? (És a legkisebbet?)

Végül egy váratlan következmény, amely a 16. fejezetben még központi szerepet kap:

Következmény. *n pozitív szám számtani közepe legfeljebb akkora, mint a négyzetes közepük:*

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}, \tag{10.21}$$

és egyenlőség csak akkor áll, ha mind az n szám egyenlő.

Bizonyítás. Rendezzük az a_i számokat növekvő sorrendbe, és legyen $b_i = a_i$. Ekkor (10.18), illetve gyengítése (szigorú egyenlőtlenség helyett egyenlőtlenség/egyenlőség) adja (10.21)-et. □

Megjegyezzük, hogy a következmény speciális esete a 3.5. tétel (Jensen-egyenlőtlenség) tükörképének, amikor $f(x)$ szigorúan konvex, nevezetesen $f(x) = x^2$.

11. Önkéntes nyugdíjrendszerek

Többféle szempontból lehet a nyugdíjrendszereket osztályozni, itt az ún. *pilléreket* megkülönböztetjük meg: 1. a kötelező tb-pillért, 2. a kötelező magánpillért és 3. az önkéntes magánpillért. Kicsit részletesebben: 1. A kötelező tb-pillérben (vö. 10. fejezet) a mindenkori dolgozók járulékot fizetnek a mindenkori nyugdíjasok részére, s cserében majd ők is nyugdíjat kapnak az akkori dolgozóktól. 2. A kötelező magánpillérben a kormányzat által kialakított keretekben a dolgozók saját maguk részére vagyont halmoznak föl, amelyet időskorukban fokozatosan vagy egyben felélnek. 3. Az önkéntes magánpillér abban különbözik kötelező társától, hogy a részvétel önkéntes, cserében viszont az állam által támogatott. Ebben a könyvben fontossága miatt általában a tb-nyugdíjrendszert modellezzük, de most érdekességként kitekintünk az önkéntes magánnyugdíj-rendszerekre is (miközben kihagyjuk a kötelező magánnyugdíj-rendszert).

Tájékoztatásul a 11.1. táblázatban bemutatunk négy országot, ahol a három pillér súlya jelentősen különböző. A számok csak hozzávetőlegesek, és a 2. magyar pillér gyakorlatilag már halott (2010-ben még a dolgozók 75%-a vett részt benne), s ellentétben Svájccal vagy Hollandiával, a kötelező rendszer az Egyesült Államokban csak a jobban fizetett szakmákra terjed ki. További probléma, hogy az önkéntes pillérben kicsi az évente rendszeresen befizetők aránya.

11.1. táblázat. Pillérek súlya és elterjedtsége négy országban, 2012 körül, %

	Kötelező tb		Kötelező magán		Önkéntes magán	
Ország	részvétel	járulék-kulcs	részvétel	járulék-kulcs	részvétel	járulék-kulcs
Egyesült Államok	100	12	50	9	17	3
Németország	100	20	0	0	15	4
Csehország	100	28	0	0	50	3
Magyarország	100	34	3	0	35	4

Ugyancsak megemlítjük, hogy Magyarországon jelenleg három önkéntes rendszer is működik (félrevezető elnevezéssel: az önkéntes nyugdíjrendszer, a nyugdíj-előtakarékossági számla és a nyugdíjbiztosítás), de együttes súlyuk is jelentéktelen. Előzetes adatok szerint 2018-ban 710 ezer fő kb. 140 mrd Ft-ot fizetett be, s ez után 28 mrd Ft adókedvezményt vettek fel. (Összehasonlításként, a 2.3. táblázatból kiolvasható, hogy a kötelező nyugdíjjárulék abban az évben 3 263 mrd Ft volt.) Ez egy személyre átlagosan 36 eFt, holott a maximum 280 eFt – az átlagos kihasználás csupán 13%. Ha a mindjárt elemzendő modellt számszerűsítenénk, és karikatúraszerűen feltennénk, hogy a tényleges részvevők maximálisan igénybe veszik a rendszert, akkor kb. 100 ezer tag lenne, és a maximális támogatást minden magyar dolgozó fizetné.

A fejezet szerkezete a következő. A 11.1. alfejezetben előrelátó dolgozók önkéntes, de támogatott megtakarítással élhetnek. A 11.2. alfejezetben bevezetjük a rövidlátókat, akiket *passzivitásuk* miatt az előrelátók egyszerűen kihasználnak. A 11.3. alfejezetben azonban a rövidlátók *aktivizálódnak*, emiatt a torz jövedelem-újraelosztás gyengül.

11.1. Előrelátó dolgozók támogatott megtakarítása (nincs tb-nyugdíj)

Ebben az alfejezetben a dolgozók előrelátók, de más szempontból módosítjuk az 5.3. alfejezet életciklus modelljét: *a)* feltesszük, hogy a hagyományos megtakarítást a kormányzat támogatja, és *b)* eltekintünk a kamattól. Megmutatjuk, hogy a támogatást olyan adó fedezi, amelyet hozzáadva a támogatott megtakarításhoz, a támogatás nélküli megtakarítás adódik – azaz a támogatás semleges, inkább a restség leküzdésére szolgáló eszköz.

Egyszerűsítésként stacionárius népességet feltételezünk, s a gyermekek fogyasztását elhanyagoljuk. Minden évben S dolgozó és T nyugdíjas évjárat él együtt, S és T pozitív egész szám. $Q = 0$ miatt felnőtt években számolunk. Minden évjáratnak gyakorlatilag végtelen sok tagja van, s így a tagok egyéni döntéseinek nincs hatása a rendszer egészére. Statikus modellünkben a keresetek és a nyugdíjak időtlenek és kortalanok: a bruttó kereset egységnyi, és nincs szja.

Most nem a nyugdíjas élettartamnak a munkában töltött időszakhoz mért arányára ($p = T/S$-re), hanem annak reciprokára lesz szükségünk, az ún. eltartói arányra:

$$\eta = \frac{S}{T}. \tag{11.1}$$

A fogyasztási egyenletpár felírásához be kell vezetni az önkéntes megtakarítást: $s \geq 0$. A dolgozó minden forintnyi önkéntes megtakarítását a kormányzat $\alpha > 0$ forintnyi támogatással egészíti ki – ez a *támogatási kulcs*. Ellentétben az irodalom zömével, mi explicite modellezzük e támogatás adóvonzatát: $\theta \geq 0$ az eszmei (a valóságban nem létező) *különadó* (kulcsa):

$$\theta = \alpha s. \tag{11.2}$$

Stacionaritási feltevésünk miatt nagyon egyszerű a fiatal- és az időskori éves fogyasztási pár:

$$c = 1 - \theta - s, \qquad d = \eta(1 + \alpha)s. \tag{11.3}$$

Szóban: fiatalkori éves fogyasztás = bruttó bér – különadó – megtakarítás, időskori éves fogyasztás = eltartói arány × (megtakarítás+támogatás). (Mivel S év alatt $S(1 + \alpha)s$) vagyon halmozódott föl, ezt T évre egyenletesen elosztva, $S(1+\alpha)s/T$ fogyasztás adódik.)

Egyelőre feltesszük, hogy minden évben minden dolgozó *előrelátó*, s ezért annyit takarít meg, hogy tervezett fogyasztási pályáját kisimítsa, azaz egyenlővé teszi fiatal- és időskori fogyasztását (vö. (5.6)-beli Leontief-féle hasznosságfüggvény):

$$1 - \theta - s = \eta(1 + \alpha)s, \qquad \text{ezért} \qquad s^{\mathrm{o}} = \frac{1 - \theta}{1 + \eta(1 + \alpha)}. \tag{11.4}$$

Behelyettesítve (11.4b)-t (11.2)-be, egy implicit egyenletet kapunk az egyensúlyi adókulcsra:

$$\theta = \alpha s = \alpha \frac{1 - \theta}{1 + \eta(1 + \alpha)}.$$

Innen adódik az egyensúlyi $\theta^{\mathrm{o}}_{\alpha}$ adókulcs és az optimális s^{o}_{α} önkéntes megtakarítás.

11.1. tétel. *Előrelátó dolgozók támogatott megtakarítási modelljében az egyensúlyi adókulcs*

$$\theta_\alpha^o = \frac{\alpha}{(1+\eta)(1+\alpha)} > 0. \tag{11.5}$$

Ekkor egy dolgozó optimális megtakarítása

$$s_\alpha^o = \frac{1}{(1+\eta)(1+\alpha)} > 0. \tag{11.6}$$

Következmény. *(Semlegesség.) Előrelátó dolgozók esetén egy dolgozó adójának és optimális megtakarításának összege független a támogatási kulcstól:*

$$\theta_\alpha^o + s_\alpha^o = \frac{1}{1+\eta} = s_0^o.$$

Megjegyzés. Mivel az adó és a megtakarítás összege független a támogatási kulcstól, ezért előrelátó dolgozók esetén a támogatásra valójában nincs szükség.

11.1. feladat. Számoljuk ki kézzel a (11.5)-beli egyensúlyi adókulcsot az $S = 40$ és $T = 20$, $\alpha = 1$ esetre!

11.2. Passzív rövidlátó dolgozók (van tb-nyugdíj)

Most az előrelátók *mellé* bevezetjük a rövidlátó dolgozókat, akik elhanyagolják az időskori igényeiket, ezért – az önkéntes rendszer mellett – a kormányzat mindenkinek kötelező tb-nyugdíjrendszert is működtet. Minden dolgozó egységnyi keresetéből minden évben $\tau > 0$ kötelező nyugdíjjárulékot fizet.

Feltéve, hogy a nyugdíjba vonuló évjáratok minden tagja minden évben b nagyságú kötelező nyugdíjat kap, e nyugdíj képlete (10.9) miatt

$$b = \frac{S\tau}{T} = \eta\tau. \tag{11.7}$$

Önkéntes megtakarítás hiányában a fogyasztói pálya akkor lenne *sima*, ha a nettó kereset és a nyugdíj egyenlő lenne, azaz egységnyi bruttó keresettel számolva, $1 - \tau = b$. (11.7)-et behelyettesítve adódik a símító *maximális* járulékkulcs:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{1+\eta}, \tag{11.8}$$

s ez (speciális feltevéseink mellett) megegyezik a 11.1. tétel következményében szereplő értékkel, a nulla támogatás melletti megtakarítással: $s_0^o = \bar{\tau}$.

A dolgozók jelentős része nem szívesen fizet nagy kötelező nyugdíjjárulékot, ezért a kormányzat a maximális érték alatt tartja a járulékot: $\tau < \bar{\tau}$. Kiindulópontunk: még az azonos kereset ellenére is különböző a dolgozók megtakarítási hajlandósága. Feltesszük, hogy csak két típus létezik: rövidlátó (L) és előrelátó (H); súlyuk $f_L, f_H > 0$ és $f_L + f_H = 1$. A megtakarítások csak a típustól függnek: s_L és s_H. Elhagyva az α alsó indexet, igaz a következő adóegyenlet:

$$\theta = \alpha(f_L s_L + f_H s_H). \tag{11.9}$$

Ebben az alfejezetben a rövidlátó dolgozó *passzív*, önként semmit sem takarít meg: $s_{\mathrm{L}} = 0$. Az előrelátó dolgozó viszont a jövedelempályát kisimítandó, a kötelező nyugdíjjárulékon túl önkéntesen megtakarít: $s_{\mathrm{H}} > 0$. Ekkor a két típus fiatal- és időskori fogyasztási egyenletei definíció szerint rendre

$$c_{\mathrm{L}} = 1 - \tau - \theta, \qquad d_{\mathrm{L}} = \eta\tau \tag{11.10L}$$

és

$$c_{\mathrm{H}} = 1 - \tau - \theta - s_{\mathrm{H}}, \qquad d_{\mathrm{H}} = \eta[\tau + (1+\alpha)s_{\mathrm{H}}]. \tag{11.10H}$$

Szóban: a (11.3)-beli fiatalkori fogyasztásból levonódik még a nyugdíjjárulék, az időskorihoz viszont hozzáadódik a nyugdíj.

Figyelembe véve a kötelező nyugdíjrendszer létét, megismételjük a 11.1. alfejezet gondolatmenetét. Feltesszük, hogy minden évben a H-típusú dolgozó annyit takarít meg, hogy tervezett fogyasztási pályáját kisimítsa, azaz egyenlővé teszi fiatal- és időskori fogyasztását, felhasználva (11.10H)-t:

$$1 - \tau - \theta - s_{\mathrm{H}} = \eta[\tau + (1+\alpha)s_{\mathrm{H}}], \qquad \text{ezért} \qquad s_{\mathrm{H}}^{\mathrm{o}} = \frac{1-(1+\eta)\tau - \theta}{1+\eta(1+\alpha)}. \tag{11.11}$$

Behelyettesítve (11.11b)-t (második képlet) és $s_{\mathrm{L}} = 0$-t (11.9)-be, egy implicit egyenletet kapunk az egyensúlyi adókulcsra:

$$\theta = \alpha f_{\mathrm{H}} s_{\mathrm{H}} = \alpha f_{\mathrm{H}} \frac{\chi - \theta}{1+\eta(1+\alpha)}, \qquad \text{ahol} \qquad \chi = 1 - (1+\eta)\tau > 0.$$

Itt χ mutatja a kötelező nyugdíjrendszer által az önkéntes megtakarításra hagyott rést (vö. (11.8) és a $\tau < \bar{\tau}$ feltevés). Innen adódik az új egyensúlyi θ^{o} adókulcs és az önkéntes optimális $s_{\mathrm{H}}^{\mathrm{o}}$ megtakarítás.

11.2. tétel. *A passzív rövidlátó dolgozók modelljében a kormányzat a nyugdíjjárulék- és támogatási kulcs mellett a következő adókulcsot választja:*

$$\theta^{\mathrm{o}} = \frac{\alpha\chi f_{\mathrm{H}}}{1+\eta(1+\alpha)+\alpha f_{\mathrm{H}}} > 0. \tag{11.12}$$

Ekkor az előrelátó és a passzív dolgozó optimális megtakarítása rendre

$$s_{\mathrm{H}}^{\mathrm{o}} = \frac{\chi}{1+\eta(1+\alpha)+\alpha f_{\mathrm{H}}} > 0 \qquad \textit{és} \qquad s_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}} = 0. \tag{11.13}$$

Megjegyzések. 1. Ebben a modellben az önkéntes nyugdíjrendszer egyszerűen jövedelmet csoportosít át a rövidlátóktól az előrelátóknak. Minél nagyobb az α támogatási kulcs, annál nagyobb a perverz újraelosztás: a tücsök által a hangyának a különadóba csomagolt külön jövedelme.

2. Még ezek a képletek is bonyolultak, s az egyes paraméterek hatása távolról sem világos. A tisztázást szolgálja a

11.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a passzív rövidlátók jelenléte csökkenti a (11.12)-beli egyensúlyi adókulcsot!

A folytatáshoz további mennyiségekre lesz szükségünk. A munkában töltött évek aránya a felnőtt élettartamhoz képest

$$\rho = \frac{S}{S+T} = \frac{\eta}{\eta+1}.$$

Az L-(rövidlátó) és a H-(előrelátó) típus átlagos életpálya-fogyasztása rendre

$$e_{\mathrm{L}} = \rho c_{\mathrm{L}} + (1-\rho)d_{\mathrm{L}} = \rho(1 - f_{\mathrm{H}}\theta^{\mathrm{o}}/f_{\mathrm{L}}) \qquad \text{és} \qquad c_{\mathrm{H}} = d_{\mathrm{H}} = \rho(1 + f_{\mathrm{L}}\theta^{\mathrm{o}}/f_{\mathrm{H}}),$$

Szeretnénk mérni a rövidlátók fogyasztási pályájának egyenetlenségét, s ezért bevezetünk egy fontos valószínűség-számítási fogalmat, a *szórást* (vö. későbbi 16.2. alfejezet). amely a várható érték körüli ingadozás mértéke. A rendszer egyenetlenségét/egyenlőtlenségét két (belső és külső) szórással jellemezzük: a belső (I index) az egyenetlen L-fogyasztási pályák szórása, a külső (E index) pedig az életpályák átlagos fogyasztásának szórása:

$$\sigma_{\mathrm{I}}^2 = f_{\mathrm{L}}[\rho(c_{\mathrm{L}} - e_{\mathrm{L}})^2 + (1-\rho)(d_{\mathrm{L}} - e_{\mathrm{L}})^2] \qquad \text{és} \qquad \sigma_{\mathrm{E}}^2 = f_{\mathrm{L}}(e_{\mathrm{L}} - \rho)^2 + f_{\mathrm{H}}(c_{\mathrm{H}} - \rho)^2.$$

A megértést elősegítendő, a 11.2. táblázatban numerikusan szemléltetjük eredményeinket. $S = 40$, $T = 20$ év, $\tau = 0{,}2$. Öt támogatási kulcsot modellezünk 0 és 1 között, és a népességben háromszor több rövidlátó van, mint előrelátó: $f_{\mathrm{L}} = 3/4$ és $f_{\mathrm{H}} = 1/4$. Ahogy az α támogatási kulcs 0-ról 1-re növekszik, úgy csökken L átlagfogyasztása, $c_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}} = 0{,}667$-ről 0,654-re. A későbbi összehasonlítás kedvéért: a külső szórás 0-ról 0,022-re növekszik; míg a belső alig csökken, és 0,16 körül marad.

11.2. táblázat. Pályák kötelező és önkéntes nyugdíj esetén: passzív rövidlátóak (L) esete.

Támogatási kulcs	Adókulcs	Előrelátó	Rövidlátó dolgozó	Rövidlátó nyugdíjas	Rövidlátó átlagos	Belső	Külső
		fogyasztás				szórás	
α	θ^{o}	$c_{\mathrm{H}}^{\mathrm{o}} = d_{\mathrm{H}}^{\mathrm{o}}$	$c_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}}$	$d_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}}$	$e_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}}$	σ_{I}	σ_{E}
0,00	0,000	0,667	0,800	0,4	0,667	0,163	0,000
0,25	0,007	0,681	0,793	0,4	0,662	0,160	0,008
0,50	0,012	0,691	0,788	0,4	0,659	0,159	0,014
0,75	0,016	0,699	0,784	0,4	0,656	0,157	0,018
1,00	0,019	0,705	0,781	0,4	0,654	0,156	0,022

11.3. Aktív rövidlátó dolgozók

Ellentétben a 11.2. alfejezettel, most feladjuk a rövidlátó dolgozók passzivitását; mérsékelt akaraterőt és értelmet tulajdonítunk L-nek.

Modellünkben minden L-típusú dolgozó naivan felteszi, hogy csak ő rövidlátó, tehát az előrelátók (alá)becsült megtakarítása $\tilde{s}$, ezért adóegyenlegük $\theta = \alpha\tilde{s}$, azaz $\tilde{s} = \theta/\alpha$. Ő lelkileg képtelen ennyit félretenni, de adott γ *relatív megtakarítási hajlandóság* esetén $(0 < \gamma \le 1)$ a becsült megtakarítás γ-szorosára hajlandó:

$$s_{\mathrm{L}} = \gamma\frac{\theta}{\alpha}. \tag{11.14}$$

Megtartva az előrelátók (11.11) megtakarítási egyenletét, s_{L} megjelenése miatt a (11.9) mérlegegyenlet módosul:

$$\theta = \gamma f_{\mathrm{L}}\theta + \alpha f_{\mathrm{H}}\frac{\chi - \theta}{1 + \eta(1+\alpha)}. \tag{11.15}$$

Rövid kitérőt teszünk: ha a heurisztikus (11.14) megtakarítási egyenlet helyett leszámított hasznosságú fogyasztást feltételeznénk (vö. 5.3. alfejezet), akkor (11.15) helyett egy jóval bonyolultabb egyenletet kapnánk. Valóban, legyen $\delta \in (0,1)$ a leszámítolási együttható, ekkor a rövidlátók optimalitási feltétele

$$1-\theta-s_{\mathrm{L}}=\eta(1+\alpha)s_{\mathrm{L}}/\delta, \qquad \text{ezért} \qquad s_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}}=\frac{1-\theta}{1+\eta(1+\alpha)/\delta}. \tag{11.4L}$$

A teljesség kedvéért (11.4)-et felírjuk H-ra:

$$1-\theta-s_{\mathrm{H}}=\eta(1+\alpha)s_{\mathrm{H}}, \qquad \text{ezért} \qquad s_{\mathrm{H}}^{\mathrm{o}}=\frac{1-\theta}{1+\eta(1+\alpha)}. \tag{11.4H}$$

(11.4L)-t és (11.4H)-t behelyettesítve a (11.9) mérlegegyenletbe, túlzottan bonyolult egyenletet kapnánk:

$$\theta=\alpha f_{\mathrm{L}}\frac{\chi-\theta}{1+\eta(1+\alpha)/\delta}+\alpha f_{\mathrm{H}}\frac{\chi-\theta}{1+\eta(1+\alpha)}. \tag{11.15$'$}$$

Visszatérve a heurisztikus (11.14) szabályhoz, adódik a

11.3. tétel. *Aktív rövidlátó dolgozók esetén az állandósult állapotbeli adókulcs, H- és L-megtakarítás rendre*

$$\theta^{\mathrm{o}}=\frac{\alpha f_{\mathrm{H}}\chi}{\psi}, \qquad s_{\mathrm{H}}^{\mathrm{o}}=\frac{(1-\gamma f_{\mathrm{L}})\chi}{\psi} \qquad \text{\textit{és}} \qquad s_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}}=\frac{\gamma f_{\mathrm{H}}\chi}{\psi}, \tag{11.16}$$

ahol

$$\psi=(1-\gamma f_{\mathrm{L}})[1+\eta(1+\alpha)]+\alpha f_{\mathrm{H}}>0. \tag{11.17}$$

Megjegyzés. Az aktív rövidlátók esetén a (11.16)–(11.17) egyensúlyi adókulcsból látszik, hogy minél nagyobb a γ relatív megtakarítási hajlandóság, annál nagyobb a θ^{o} egyensúlyi adókulcs, és annál kisebb a perverz újraelosztás.

11.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\gamma=1$ (maximális relatív megtakarítási hajlandóság), akkor paradox módon a rövidlátó előrelátóvá válik: $s_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}}=s_{\mathrm{H}}^{\mathrm{o}}$; és mindkét szórás eltűnik: $\sigma_{\mathrm{I}}=\sigma_{\mathrm{E}}=0$!

A 11.3. táblázat a γ relatív megtakarítási hajlandóság hatását mutatja rögzített $\alpha=1$ támogatási kulcs esetén (az 1. sor a 11.2. táblázat utolsó sora). Ahogy γ 0-ról fokozatosan 1-re emelkedik, az egyensúlyi adókulcs 0,019-ről 0,067-re növekszik, és mindkét típus fogyasztási pályája kisimul, a külső szórás 0,022-ről 0-ra süllyed, a belső pedig 0,156-ről 0-ra.

11.3. táblázat. Pályák kötelező és önkéntes nyugdíjra: aktív rövidlátóak (L) esete

Támo-gatási kulcs	Adó-kulcs	Előre-látó	Rövidlátó dolgozó	nyug-díjas	átlagos	Belső	Külső
		fogyasztás				szórás	
γ	θ^{o}	$c^{o}_{H} = d^{o}_{H}$	c^{o}_{L}	d^{o}_{L}	e^{o}_{L}	σ_{H}	σ_{E}
0,00	0,019	0,705	0,781	0,400	0,654	0,156	0,022
0,25	0,023	0,701	0,771	0,423	0,655	0,142	0,020
0,50	0,030	0,696	0,756	0,459	0,657	0,121	0,017
0,75	0,041	0,687	0,728	0,523	0,660	0,084	0,012
1,00	0,067	0,667	0,667	0,667	0,667	0,000	0,000

11.4. feladat. Programozzuk be a 11.3. táblázat számítását!

Összefoglalva a fejezet mondanivalóját: ha az önkéntes nyugdíjrendszer kedvezményeit csak az előrelátó dolgozók használják ki, akkor a rendszer a rövidlátók rovására segíti őket. A támogatási rendszert úgy kell megtervezni, hogy a rövidlátók is minél nagyobb mértékben használják ki a támogatásokat, például alacsony tagdíjplafonnal és bőséges támogatással. Az 5.4. alfejezetben tárgyalt hiperbolikus leszámítolás tapasztalatára alapozott, Thaler–Benartzi (2004)-féle *Save More Tomorrow* (takaríts meg többet holnap) program néhány vállalatnál bevált. A lényeg: szinte észrevétlenül kell a rövidlátókat rávenni a részvételre. Akinek nem tetszik a program, az bármikor kiléphet. Kérdés, hogy a nemzetközi szakirodalomban a *nógatók/ böködők* néven említett programok széles körben mennyire működnek.

Módszertani záró megjegyzés: ebben a fejezetben nagyon egyszerű helyzetet modelleztünk, ahol időben semmi sem változott, és a szabályok nagyon egyszerűek. Király–Simonovits (2016) azonban sokkal bonyolultabb, dinamikusan változó gazdaságot modellezett, ahol a fiatalabb dolgozók az idősebbektől tanulnak takarékoskodni (formálisan haosnlóan a 4.3. alfejezet dinamikájához). Megnyugtató volt látni, hogy az *ágensalapú* modellek módszertanát alkalmazva, képesek voltunk bonyolult tanulási folyamatokat elemezni.

12. Nyugdíjindexálás

Dinamikus nyugdíjmodellekben meg kell különböztetni a kezdő és a már megállapított nyugdíjakat: az elsőt az adott évben nyugdíjazott állampolgárok kapják, a másodikat az előző években nyugdíjazottak. Bár az új nyugdíjasok létszáma csak töredéke az összesnek, de valamikor minden nyugdíjas új nyugdíjas volt, ezért a kezdőnyugdíjak fontos szerepet játszanak a nyugdíjrendszerben.

A tb-kezdőnyugdíj a legtöbb országban többé-kevésbé függ a dolgozó kereseti pályájától, a már megállapított tb-nyugdíj pedig az előző évi nyugdíjtól. Mivel a bérek és az árak évről évre változnak, többnyire emelkednek, hosszabb távon a már megállapított tb-nyugdíjaknak is valahogyan követniük kell e folyamatokat – ez a nyugdíjindexálás.

A fejezet szerkezete a következő: a 12.1. alfejezet áttekinti a tb-nyugdíjindexálás kérdéskörét. A 12.2. alfejezet bemutatja a bérindexált nyugdíjakat. A 12.3. alfejezet modellezi a jelenlegi magyar helyzetet, az árindexált nyugdíjak átlagos helyettesítési arányának dinamikáját. A 12.4. alfejezetben vázoljuk a kombinált indexálás modelljét.

12.1. Áttekintés

A 12.1. táblázat a 2004 és 2013 közötti Magyarország példáján mutatja be a keresetek és a tb-nyugdíjak hullámzását. A 2. és 3. oszlopban rendre a *folyóáras* átlagos nyugdíj és az átlagos nettó kereset idősora áll, valamint a 4. oszlop adja a *fogyasztói árszintet*. Ez az index azt mutatja, hogy a t-edik évben egy átlagos fogyasztói kosár megvásárlása hányszorosába kerül a 2003-as évinek. Például a 2013-as árszint 60,8%-kal volt magasabb. Az 5. és a 6. oszlop közli az *állandó áras* átlagos nyugdíj és az átlagos nettó keresetek idősorát, amely kiszűri az infláció hatását. A teljesség kedvéért felírjuk a folyó- (vastag betűs) és az állandó áras (dőlt betűs) nyugdíj és nettó bér kapcsolatát:

$$b_t = \frac{\bar{\mathbf{b}}_t}{P_t} \qquad \text{és} \qquad v_t = \frac{\mathbf{v}_t}{P_t}.$$

Például a 2013-as átlagos nyugdíj folyó áron 102,5 eFt/hó, 2003-as állandó áron csak 63,7 eFt/hó! Szinte minden évben változtak a nyugdíjemelési szabályok, de itt ezzel a bonyodalommal szerencsénkre nem kell foglalkoznunk.

12.1. táblázat. Nyugdíjak és nettó keresetek, folyó és állandó árakon (eFt/hó): 2003–2013

	Folyóáras			Állandó áras	
Évek	nyugdíj	nettó kereset	Fogyasztói árszint	nyugdíj	nettó kereset
t	$\bar{\mathbf{b}}_t$	$\mathbf{v}_t$	P_t	$\bar{b}_t$	v_t
2003	50,4	88,8	1,000	50,4	88,8
2004	56,2	93,7	1,068	52,6	87,7
2005	63,0	103,1	1,106	57,0	93,2
2006	69,1	111,0	1,150	60,1	96,5
2007	76,3	114,3	1,242	61,4	92,0
2008	84,3	122,0	1,317	64,0	92,6
2009	83,4	124,1	1,373	60,7	90,4
2010	86,4	132,6	1,440	60,0	92,1
2011	91,3	141,2	1,496	61,0	94,4
2012	96,6	144,1	1,581	61,1	91,1
2013	102,5	151,1	1,608	63,7	94,0

Az egyszerűség kedvéért modellünkben minden évjáratot egy-egy személy képvisel (makromodell), és eltekintünk a keresetek életkortól való függésétől és az átlagtól való eltéréstől. További egyszerűsítés: az évjáratokat megszemélyesítő személyek szolgálati és nyugdíjban töltött ideje változatlan.

Fenti feltevéseink mellett a kezdőnyugdíj az adott évi keresettel arányos (a valóság bonyolultabb). A már megállapított nyugdíjak vagy a bérek vagy az árak, esetleg kettejük átlaga szerint nőnek, s eszerint beszélünk a nyugdíjak bér-, ár- és bér–ár-indexálásáról. Mindkét tiszta indexálási módszernek vannak előnyei és hátrányai, amelyeket a kombinált indexálás kiegyenlít. Magyarországon 1993 és 1999 között bér-, 2000 és 2009 között bér–ár-indexálás működött, és azóta árindexálás van érvényben.

A legtöbb magyar állampolgár nem ért egyet azzal, hogy a már megállapított nyugdíjak inflációt pótló emelése matematikailag arányos. Szerintük egy 30 eFt-os nyugdíj 3%-os emelése aránytalanul kicsi egy 300 eFt-os nyugdíj hasonló mértékű emeléséhez képest: 900 Ft vs. 9000 Ft. Mielőtt megmagyaráznám, hogy miért tartom ezt az emelési elvet helyesnek, megjegyzem, hogy ma már a nyugdíjemelések világszerte az arányossági elven alapulnak. A magyarázat: ha az emelés előtt elfogadta a társadalom az 1:10-es arányt, akkor az emelés után is el kell fogadnia – a 30,9 eFt és a 309 eFt ugyanannyi ér, mint korábban a 30 eFt és a 300 eFt. (Itt burkoltan feltettük, hogy az árindex független a jövedelemtől.) Ha a „közvélekedést” követné az emelési szabály, és mindenki azonos összeget kapna emelésként, például az átlagos nyugdíj 3%-át, 2019-ben 4 eFt-ot, akkor előbb-utóbb a nyugdíjarányok nagyon összehúzódnának – és sérülne a biztosítási jelleg. Egyébként egy ehhez közeli emelési szabály jellemezte a magyar nyugdíjrendszert 1968 és 1992 között – de nem vált be.

Más a helyzet a bérkövető nyugdíjemelésnél. Itt nemcsak az azonos évben nyugdíjba vonulók közti nyugdíjarányok őrződnek meg, hanem az egymás utáni évjáratok tagjai közti arányok is. Az árindexálásnál viszont még szerény, évi 2%-os átlagos reálbér-emelkedésnél is ugyanennyivel tágul az egymás utáni évjáratok nyugdíja közti relatív rés, de a 2015 és 2018 közötti időszak 28%-os reálbér-növekedése az árindexálás (és az 1 éves késleltetés) miatt 28%-os különbséget okoz a 2016-os és 2019-es nyugdíjasok járadéka között. Következnek a részletek.

12.2. Bérindexált nyugdíjak

Éves modellel dolgozunk, ahol $t = 0, 1, \ldots$. Az inflációs hatásokat eleve eltávolítjuk, mert állandó áras változókkal számolunk (lásd a 12.1. táblázat utolsó két oszlopát). Minden évjárat képviselője S évig dolgozik (januártól decemberig), és T évig van nyugdíjban, ahol S, T természetes számok, például $S = 40$ év és $T = 20$ év.

A legegyszerűbb közelítésben (elhagyva a késleltetést és a kereseti heterogenitást) a korábbi keresetek valorizálásánál *kezdőnyugdíj* az adott évi nettó keresettel (jele: v_t) arányos:

$$b_t = \beta v_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, \tag{12.1}$$

ahol a β arányossági szorzót *járadékszorzónak* nevezzük. Magyarországon a 40 éves szolgálati időhöz tartozó érték kb. 80%.

Legyen a t-edik évi reálbér növekedési együtthatója G_t, azaz $v_t = G_t v_{t-1}$. *Bérindexált nyugdíjrendszerben* a *korábban megállapított nyugdíjak* az adott évi bérnövekedés ütemével növekszenek. A szabatos leírást a (12.15) képletre halasztva kimondható a

12.1. tétel. *A (12.1) szerinti valorizálás, a régóta tartó bérindexálás esetén a kezdőnyugdíjak és a már korábban megállapított nyugdíjak (reál)értéke – függetlenül a nyugdíjazás óta eltelt időtől – azonos, azaz megkülönböztetés nélkül:*

$$b_t = \beta v_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{12.2}$$

Bizonyítás. Először tekintsük azt a nyugdíjast, aki a $t-1$-edik évben ment nyugdíjba: $b_{t-1} = \beta v_{t-1}$ kezdőnyugdíjjal. A bérindexálás értelmében a t-edik évben a már megállapított nyugdíja

$$G_t b_{t-1} = G_t \beta v_{t-1} = \beta v_t, \tag{12.3}$$

azaz megegyezik az az évi kezdőnyugdíjjal. Teljes indukcióval belátható, hogy a $k = 2, \ldots, T-1$ évvel korábban nyugdíjba vonuló dolgozó t-edik évi nyugdíja szintén b_t. □

Ebben az egyszerű rendszerben minden nyugdíjas járadékának a dolgozók közös nettó béréhez viszonyított aránya, a járadékszorzó β – ezt *helyettesítési aránynak* is nevezik. Mitől függ az egyensúlyi járadékszorzó? E kérdés megválaszolásához be kell vezetni a nyugdíjjárulék-kulcsot: τ és a *szuperbruttó bért* (hivatalos nevén: teljes bérköltséget): w_t, mivel a nyugdíj a nettó, a τw_t járulék viszont a szuperbruttó keresettel arányos. Szükségünk lesz még az egészsé gügyi járulék kulcsára (amelybe a homogén lineáris szja kulcsot is beleértjük): θ.

$$v_t = (1 - \tau - \theta) w_t, \qquad \tau + \theta < 1. \tag{12.4}$$

Könnyen belátható a

12.2. tétel. *A bérindexált nyugdíjrendszerben az egyensúlyi járadékszorzó*

$$\beta = \frac{\tau\eta}{1 - \tau - \theta}, \qquad \text{ahol} \qquad \eta = \frac{S}{T}. \tag{12.5}$$

Bizonyítás. Egy felosztó-kirovó nyugdíjrendszerben a teljes nyugdíjkiadás és a teljes nyugdíjbevétel minden évben egyenlő egymással:

$$T\beta v_t = \tau S w_t.$$

Figyelembe véve (12.4)-et:

$$T\beta(1 - \tau - \theta) w_t = \tau S w_t,$$

azaz (12.5) áll. □

Kitérő. A legtöbb országban a járulékok megoszlanak a dolgozók (E) és a munkáltatók (F) között, és a két bér közé beékelődik egy harmadik, a *bruttó bér*, jele u_t. Mindkét (nyugdíj- és egészségügyi) járulékkulcsot (vesszővel jelölve) a bruttóbérre vetítik:

$$\tau' = \tau^{\mathrm{E}} + \tau^{\mathrm{F}} \qquad \text{és} \qquad \theta' = \theta^{\mathrm{E}} + \theta^{\mathrm{F}},$$

és a hármas bérkapcsolat

$$v_t = (1 - \tau^{\mathrm{E}} - \theta^{\mathrm{E}})u_t \qquad \text{és} \qquad w_t = (1 + \tau^{\mathrm{F}} + \theta^{\mathrm{F}})u_t.$$

Szóban:

a nettó bér egyenlő a bruttó bér mínusz a munkavállaló nyugdíj- és egészségügyi járuléka (beleértve az szját);

a teljes bérköltség egyenlő a bruttó bér plusz a munkáltató nyugdíj- és egészségügyi járuléka.

2018-ban Magyarországon a megfelelő paraméterértékek a következők voltak:

$$\tau^{\mathrm{E}} = 0{,}1; \quad \tau^{\mathrm{F}} = 0{,}145 \qquad \text{és} \qquad \theta^{\mathrm{E}} = 0{,}15 + 0{,}085 = 0{,}235; \quad \theta^{\mathrm{F}} = 0{,}05;$$

ahol θ^{E} első tagja az szja-kulcs, második tagja pedig az egészségügyi járulékkulcs.

A fenti megosztás közgazdaságilag értelmetlen, hiszen csak a munkavállalói és a munkáltatói járulék összegének van értelme, de lélektani okokból szinte minden ország ezt a megosztást használja. A következőkben átszámoljuk a nyugdíj- és egészségügyi járulékkulcsokat bruttó helyett teljes bérköltség alapra. Mindkét járuléktömeg változatlan, tehát

$$\tau w_t = \tau' u_t \qquad \text{és} \qquad \theta w_t = \theta' u_t.$$

Felhasználva a korábbi azonosságokat, az önkényes paraméterek standardizálhatók:

$$\tau = \frac{\tau^{\mathrm{E}} + \tau^{\mathrm{F}}}{1 + \tau^{\mathrm{F}} + \theta^{\mathrm{F}}} \qquad \text{és} \qquad \theta = \frac{\theta^{\mathrm{E}} + \theta^{\mathrm{F}}}{1 + \tau^{\mathrm{F}} + \theta^{\mathrm{F}}}.$$

Számpélda: $\tau = 0{,}205$ és $\theta = 0{,}197$; az utóbbiból az szja kulcsa 0,126.

A bérindexált nyugdíjak hazai alakulását (1993–1999) bemutatandó, a 12.2. táblázatban felidézzük a magyar termelés (y_t), az átlagos nettó bér (v_t) és az átlagos nyugdíj ($\bar{b}_t$) reálértékének változását, valamint az átlagos helyettesítési arány (jele: γ_t) idősorát. Az állandó mellékhatások miatt a főszabály csak gyengén érvényesül (vö. 1997 és 1998), de az általános helyettesítési arány 0,6 körül ingadozik. A szereplő növekedési együtthatók (rendre GDP, nettó bér és nyugdíj) definíciója a következő:

$$G_t^{\mathrm{y}} = \frac{y_t}{y_{t-1}}, \qquad G_t^{\mathrm{v}} = \frac{v_t}{v_{t-1}}, \qquad G_t^{\bar{b}} = \frac{\bar{b}_t}{\bar{b}_{t-1}}.$$

12.2. táblázat. Reálkibocsátás, -bérek, -nyugdíjak és arányuk 1993–1999: bérindexálás

	GDP	Nettó bér	Nyugdíj	
Év	reálváltozása			Helyettesítési arány
t	$100(G_t^y - 1)$	$100(G_t^v - 1)$	$100(G_t^b - 1)$	$\gamma_t = \bar{b}_t/v_t$
1993	–0,8	–3,9	–4,6	0,603
1994	3,1	7,2	4,7	0,594
1995	1,5	–12,2	–10,1	0,619
1996	0,0	–5,0	–7,9	0,593
1997	3,3	4,9	0,4	0,563
1998	4,2	3,6	6,2	0,578
1999	3,1	2,5	2,1	0,592

12.3. Árindexált nyugdíjak

Számos országban és számos időszakban az elvileg kielégítő bérindexálás helyett árindexálás működött, és ez működik hazánkban is 2010 óta.

Kiindulásként legyen b_t a t-edik év átlagos *kezdőnyugdíja*, de a valorizálásban most már figyelembe vesszük a késleltetést, ezért b_t az előző évi v_{t-1} nettó keresettel arányos:

$$b_t = \beta v_{t-1}, \qquad t = 1, 2, \ldots, \qquad \beta > 0. \tag{12.6}$$

Rátérünk a már megállapított nyugdíjak *árindexálására.* Itt már elkerülhetetlen az évjárati modellezés. A t-edik évben a kezdőnyugdíj mellett „él” $T - 1$ évjárat korábban megállapított, de azóta (reál)értékét megtartó nyugdíja: $b_{t-1}, \ldots, b_{t-T+1}$.

12.1. példa. Bevezetésképp egy végletekig leegyszerűsített helyzetet mutatunk be a 12.2. táblázatban. 2016 előtt a bruttó reálbér mindvégig 1,5 egységnyi volt, 2016 után 3,0 egység, a megfelelő nettó bérek pedig 1 és 2. $S = 38$ és $T = 20$ évvel számolva, a 2017 előtti nyugdíjak a megállapítástól függetlenül 0,8 értékűek voltak, aztán fokozatosan az új nyugdíjak megduplázódtak, míg 2036-ban már minden nyugdíj 1,6 értékű lett. Ennek megfelelően a járulékkulcs 2016-ban megfeleződött, majd egyenletes mértékben 20 év alatt visszaáll az eredeti 28%-ra.

12.2. táblázat. Reálbérrobbanás, a nyugdíjprofil és a járulékkulcs változása

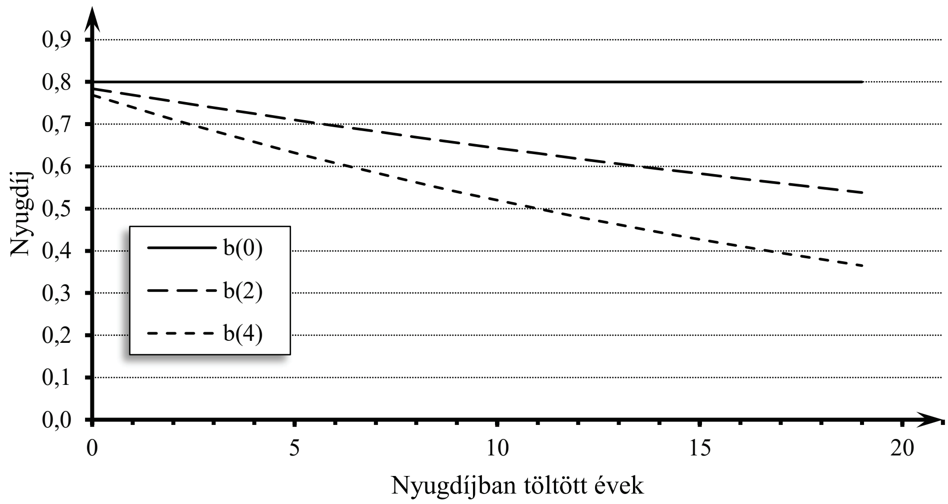
		Új	1 éves	2 éves	...	19 éves	
Év	Nettó bér	nyugdíjak					Járulékkulcs
t	v_t	b_t	b_{t-1}	b_{t-2}	...	b_{t-19}	τ
2015	1	0,8	0,8	0,8	...	0,8	28,0%
2016	2	0,8	0,8	0,8	...	0,8	14,0%
2017	2	1,6	0,8	0,8	...	0,8	14,7%
2018	2	1,6	1,6	0,8	...	0,8	15,4%
...	...	...	...	...	...	...	...
2035	2	1,6	1,6	1,6	...	0,8	27,4%
2036	2	1,6	1,6	1,6	...	1,6	28,0%

Karikatúránkat meghaladva további elemzés előkészítéseként egyelőre tegyük föl, hogy a nettó keresetek állandó ütemben nőnek (a hatványkitevő belépése miatt a v felsőindexet elhagyjuk):

$$v_t = v_0 G^t, \qquad G > 1. \tag{12.7}$$

A 12.1. ábra mutatja, hogyan csökken a már megállapított nyugdíj helyettesítési aránya a nyugdíjban töltött évek múlásával lassú és gyors reálbér-növekedéskor, a zárójelben szereplő szám a reálbér-növekedés időben állandó üteme.

12.1. ábra. Nyugdíj az életkor függvényében



Visszatérve az időben változó reálbér-növekedéshez, megismételjük, hogy feltevésünk szerint minden évben ugyanannyi egyén születik, mindenki megéri a nyugdíjkorhatárt és T évig él nyugdíjban, s ezalatt a nyugdíja reálértékben változatlan marad. Ezért a t-edik év évjáratokra átlagolt nyugdíja

$$\bar{b}_t = \frac{b_t + \cdots + b_{t-T+1}}{T}. \tag{12.8}$$

Megismételjük: *átlagos helyettesítési aránynak* (máskor nyugdíjszinvonalnak) nevezzük az átlagnyugdíj és a nettó bér hányadosát:

$$\gamma_t = \frac{\bar{b}_t}{v_t}. \tag{12.9}$$

Feltesszük, hogy (12.6) a 0-adik időszak előtt is érvényesült, ezért a 0-adik év kezdőértékei

$$b_0 = \beta v_{-1}, \qquad b_{-1} = \beta v_{-2}, \qquad \ldots, \qquad b_{-T+1} = \beta v_{-T}. \tag{12.6°}$$

Behelyettesítve (12.6)-ot és (12.8)-at (12.9)-be:

$$\gamma_t = \beta \frac{v_{t-1} + \cdots + v_{t-T}}{T v_t}, \qquad t = 1, 2, \ldots. \tag{12.10}$$

12.2. példa. Először állandó reálbér-növekedési ütemre vizsgáljuk a helyettesítési arány alakulását. Behelyettesítve (12.7)-et (12.10)-be, és egyszerűsítés után a mértani sorozat összegképletét alkalmazva, az átlagos helyettesítési arány időben állandó, és zárt alakban felírható:

$$\gamma = \beta \frac{G^{-1} + \cdots + G^{-T}}{T} = \beta \frac{1 - G^{-T}}{T(G-1)}. \tag{12.11}$$

Figyelem: $G = 1$ esetén az első egyenlőség miatt $\gamma = \beta$! Minél gyorsabb a bérnövekedés, annál inkább elmarad a γ átlagos helyettesítési arány a β járadékszorzótól: kis részben a késleltetés, nagy részben a régi nyugdíjak fokozatos lemaradása miatt. Például a 12.4. táblázat szerint $T = 20$ éves nyugdíjtartam és 2%-os növekedési ütem esetén 0,8 helyett csak $\gamma = 0{,}654$ a helyettesítési arány.

12.4. táblázat. Az átlagos helyettesítési arány függése a bérnövekedés ütemétől: árindexálás

Reálbér-növekedési ütem $100(G-1)$	0	1	2	3	4	5
Átlagos helyettesítési arány γ	0,800	0,722	0,654	0,595	0,544	0,498

12.1. feladat. Számoljuk ki saját programmal (például excellel) a 12.4. táblázatot!

Visszatérünk az időben változó ütemű reálváltozókra. Először egy elemi módszerrel vizsgáljuk a helyettesítési arány dinamikáját. Adott a t-edik évi átlagnyugdíj és a nettó bér reálnövekedési együtthatója:

$$\bar{b}_t = G_t^{\bar{b}}\bar{b}_{t-1} \qquad \text{és} \qquad v_t = G_t^{\mathrm{v}} v_{t-1}.$$

Behelyettesítjük a (12.9) definícióba a két növekedési egyenletet:

$$\gamma_t = \frac{G_t^{\bar{b}}\bar{b}_{t-1}}{G_t^{\mathrm{v}} v_{t-1}},$$

s újra felhasználva (12.9)-et, adódik a

12.3. tétel. *Minden év átlagos helyettesítési aránya egyenlő az előző év átlagos helyettesítési aránya szorozva a nyugdíjak és a nettó bér növekedési együtthatójának arányával:*

$$\gamma_t = \gamma_{t-1}\frac{G_t^{\bar{b}}}{G_t^{\mathrm{v}}}.$$

Ha azonban arra vagyunk kíváncsiak, hogy miképp függ a nyugdíjak növekedési üteme a nettó bérekétől, akkor mélyebb megfontolásokra van szükségünk.

Minden évjáratot 1 nyugdíjassal képviselve, a t-edik év teljes nyugdíjkiadása [(12.8)]

$$B_t = T\bar{b}_t = b_t + \cdots + b_{t-T+1}. \tag{12.12}$$

Mivel

$$B_{t-1} = b_{t-1} + \cdots + b_{t-T},$$

ezért az állománycserélődést (a legidősebb nyugdíjasok kihalnak, a legfiatalabb nyugdíjasok belépnek) (12.12) alapján a következő rekurzió írja le:

$$B_t = b_t + B_{t-1} - b_{t-T},$$

azaz (12.8), (12.9) és (12.10) alapján az átlagos helyettesítési arányra térve (azaz B_t-t $Tv_t = TG_t v_{t-1}$-gyel osztva)

$$\gamma_t = \frac{B_t}{Tv_t} = \frac{B_{t-1}}{TG_t v_{t-1}} + \beta\frac{v_{t-1} - v_{t-T-1}}{Tv_t}. \tag{12.13}$$

12.1. példa. (Folytatás.) Visszatérünk a 12.2. táblázat szélsőséges példájához: $t_0 = 0$ évben az addig állandó egységnyi nettó reálbér hirtelen megduplázódik, s utána megint állandó lesz. Ekkor a t-edik év kezdő nyugdíja $b_t = \beta$, ha $t \le 0$ és $b_t = 2\beta$ egyébként.

Ekkor az átmenet idején $B_t = 2t\beta+(T-t)\beta$, s a helyettesítési arány a megfelezett értékről lassan tér vissza az eredeti értékre:

$$\gamma_t = \frac{t+T}{2T}\beta, \qquad t = 0, 1, \ldots, T.$$

A karikatúrától a valóság felé közeledve, bevezetjük a T évre halmozott, t-edik évbeli $\mathbf{G}_t = v_t/v_{t-T}$ bérnövekedési együtthatót, amely egyben a következő év legújabb és legrégebbi nyugdíjának arányát adja: $\mathbf{G}_t = b_{t+1}/b_{t-T+1}$. Ekkor (12.13)-ból adódik a

12.4. tétel. *(12.6°) esetén az árindexált nyugdíjak helyettesítési aránya egy időben változó együtthatójú elsőrendű differenciaegyenlet megoldása:*

$$\gamma_t = \frac{\gamma_{t-1}}{G_t} + \beta\frac{1-\mathbf{G}_{t-1}^{-1}}{G_t T}. \tag{12.14}$$

Megjegyzés. (12.14) nem általánosítható nemstacionárius népességre.

12.2. példa. (folytatás) Ujjgyakorlatként érdemes megmutatni, hogyan egyszerűsödik az átlagos helyettesítési arány (12.14) képlete állandó reálbér-növekedési ütemnél (12.11)-re. $G_t \equiv G$, $\mathbf{G}_t \equiv G^T$. Valóban, behelyettesítve a (12.14) képletbe:

$$\gamma = \frac{\gamma}{G} + \beta\frac{1-G^{1-T}}{GT}.$$

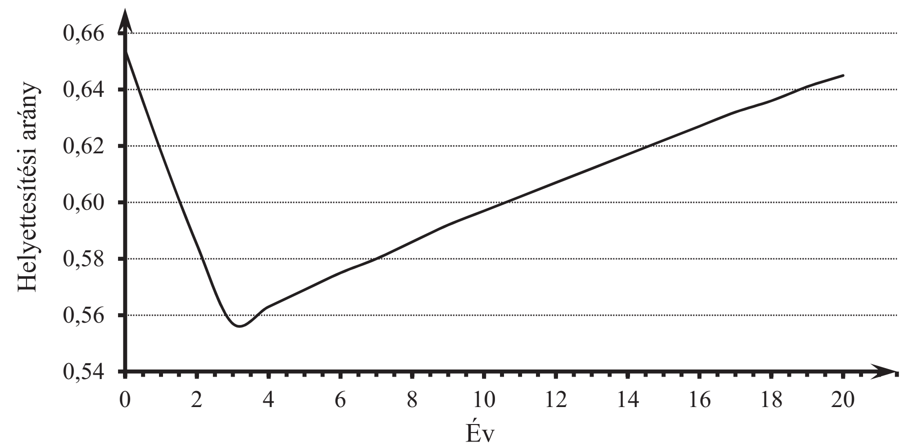
A bonyolult (12.14) képletet két megjegyzéssel tesszük érthetőbbé. A jobb oldal első tagja képviseli a rendszer tehetetlenségét: mérsékelt reálbér-növekedési ütem esetén alig változik az átlagos helyettesítési arány egyik évről a másikra. A második tag a legrégebbi és legújabb nyugdíj cserélődési hatását mutatja, de ennek abszolút értékét a 20-szal való osztás eleve lecsökkenti 0,05 alá.

Mi történik azonban, ha – mint 2016 és 2018 között – a bérnövekedési ütem 3 éven keresztül átmenetileg kiemelkedő értéket ér el? Legyen az éves növekedési együttható G_t, amely két értéket vehet föl, $1 < G_\mathrm{m} < G_\mathrm{M}$, s a nagyobbat t_0-1, t_0, t_0+1-ben:

$$G_t = \begin{cases} G_\mathrm{m}, & \text{ha } t < t_0 - 1\text{; vagy } t > t_0 + 1 \\ G_\mathrm{M}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A numerikus számításokban stabil kiindulási helyzetet mérlegelünk, ezért feltesszük, hogy $t_0 = 1$ előtt $2T$ éven keresztül érvényes volt (12.6), s a kezdeti időszakban $\mathbf{G}_0 = G_\mathrm{m}^T$ és $\gamma_1 = \gamma(G_\mathrm{m})$. A 12.2. ábra a helyettesítési arány dinamikáját mutatja. Látható, hogy a kezdeti 0,654 helyettesítési arány 3 év alatt (dőlt számok) meredeken zuhan 0,557-ig, majd megfordul, és jóval lassabban (a táblázatban nem is szereplő évben) tér vissza a kezdeti értékhez.

12.2. ábra. Helyettesítési arány dinamikája



12.2. feladat. Számoljuk ki saját programmal (például excellel) a 12.2. ábrát!

Egyszerű modellünk számszerűleg és közelítőleg megmutatta, hogyan hat egy hirtelen támadt reálbér-növekedés az átlagos helyettesítési arányra: gyors zuhanás, majd lassú felépülés. Ha figyelembe vennénk az itt elhanyagolt bonyodalmakat, akkor sokkal hitelesebb, de bonyolultabb képet kapnánk, ez azonban nem célunk.

A 12.5. táblázat bemutatja a 2010 és 2018 között főszabályként érvényesülő árindexálás hatását. Például 2018-ban az előrejelzések szerint a GDP 4, a nettó bérek 8 és a nyugdíjak csak 2%-kal nőnek, s emiatt az átlagos helyettesítési arány 58,3-ról 55,1%-ra csökken. 2020 februárjában már tudjuk, hogy a tényleges GDP-növekedési ütem 5% volt, sőt ez megismétlődött 2019-ben is, s a helyettesítési arány 0,52-ra süllyedt.

12.5. táblázat. Reálkibocsátás, -bérek, -nyugdíjak és arányuk 2010–2018, árindexálás

	GDP	Nettó bér	Nyugdíj	Helyettesítési
Év	reálváltozási üteme			arány
t	$100(G_t^y - 1)$	$100(G_t^v - 1)$	$100(G_t^b - 1)$	$\gamma_t = \bar{b}_t/v_t$
2010	0,7	1,8	–0,9	0,651
2011	1,8	2,4	1,2	0,647
2012	–1,7	–3,4	0,1	0,670
2013	1,9	3,1	4,5	0,676
2014	3,7	3,2	3,2	0,676
2015	2,9	4,3	3,5	0,668
2016	2,1	7,4	1,4	0,637
2017	4,1	10,2	3,0	0,583
2018	4,0	8,0	2,0	0,551

Végül a 12.6. táblázatban sematikusan bemutatjuk, hogy miben különbözik a bér- és az árindexált nyugdíjpálya két egymás utáni évjárat esetén. A táblázat bal oldali felében a bérindexálást (v felső index) mutatjuk be, a 0. és az 1. időszakban munkába lépő dolgozók, majd S-edik, illetve $S+1$-edik évben nyugdíjba vonuló, majd $S+T$-edik, illetve $S+T+1$-edik évben meghaló nyugdíjas szemszögéből. Figyeljük meg, hogy a $b_t^v = \beta v_t$ képlet miatt itt csak az S-edik és az $S+T$-edik évi nyugdíjak térnek el, a később születő még dolgozik, illetve már nem él. A táblázat jobb oldali felében a késleltetett valorizálás és az árindexálás (p felső index) miatt a korábban nyugdíjba vonulók nyugdíja végig $b_S^{\mathrm{p}} = \beta v_{S-1}$, a későbbieké végig $b_{S+1}^{\mathrm{p}} = \beta v_S$. Ha az átlagos reálbér jelentősen növekszik az S-edik évben, akkor az árindexálás méltánytalanul kedvez a későbbi évjáratnak, míg bérindexálás esetén a különbség minimális. (Pontosabb elemzésnél különbséget kell tenni β^{v} és β^{p} között.)

12.6. táblázat. A bér- és az árindexálás sémája két egymás utáni évjáratra

	Bérindexálás		Árindexálás	
Év	Indulás 0	Indulás 1	Indulás 0	Indulás 1
	Bér - nyugdíj	Bér - nyugdíj	Bér - nyugdíj	Bér - nyugdíj
t	$v_t \mid b_t^{\mathrm{v}}(0)$	$v_t \mid b_t^{\mathrm{v}}(1)$	$v_t \mid b_t^{\mathrm{p}}(0)$	$v_t \mid b_t^{\mathrm{p}}(1)$
0	v_0	–	v_0	–
1	v_1	v_1	v_1	v_1
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$S-1$	v_{S-1}	v_{S-1}	v_{S-1}	v_{S-1}
S	βv_S	v_S	βv_{S-1}	v_S
$S+1$	βv_{S+1}	βv_{S+1}	βv_{S-1}	βv_S
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$S+T-1$	βv_{S+T-1}	βv_{S+T-1}	βv_{S-1}	βv_S
$S+T$	–	βv_{S+T}	–	βv_S

12.4. Kombinált indexálás

Zárásként körvonalazzuk a *kombinált indexálást*, amely az ár- és a bérindexálás kombinációja. 2000 és 2009 között elvben ez a forma működött. Itt a nyugdíjat kettős (kor és naptári év szerinti) indexszel kell ellátni: hány éve ment nyugdíjba a tulajdonosa: $k = 0, 1, \ldots, T-1$ és hányadik naptári évben vagyunk: $t = 0, 1, \ldots$. Legyen ι 0 és 1 közti szám a *bérindex súlya*.

Kezdőnyugdíj (változatlanul késleltetve):

$$b_{0,t} = \beta v_{t-1}, \qquad t = 1, 2, \ldots. \tag{12.15}$$

A k éve megállapított nyugdíj:

$$b_{k,t} = b_{k-1,t-1} G_t^{\iota}, \qquad k = 1, 2, \ldots, T-1. \tag{12.16}$$

Átmeneti időszak után ismételt behelyettesítéssel adódik

$$b_{k,t} = b_{0,t-k}(G_t \cdots G_{t-k+1})^{\iota} = \beta v_{t-k-1}(G_t \cdots G_{t-k+1})^{\iota} = \beta (G_t \cdots G_{t-k+1})^{\iota-1} G_{t-k+1}^{-1} v_t.$$

Vigyázat: $b_{1,t} = b_{0,t-1}(G_t \cdots G_t)^{\iota}$-ban csak egy tényező szerepel!

A 12.7. táblázat közli a reálkibocsátást, -béreket, -nyugdíjakat és hányadosukat a 2000–2009-es időszakban, kombinált indexálásnál. Mivel a gyors reálbér-emelkedést rendkívüli nyugdíjemelések, majd a 13. havi nyugdíj fokozatos bevezetése kísérte, majd reálbér-növekedés folytatta, ezért a helyettesítési arány nemhogy nem csökkent, de még nőtt is.

Valójában nem az esztétikus (12.16) indexálást alkalmazzák, hanem a linearizált változatot:

$$b_{k,t} = b_{k-1,t-1}(1 + \iota g_t), \qquad \text{ahol} \qquad g_t = G_t - 1. \tag{12.16$'$}$$

Gyakorlatban a különbség minimális.

12.7. táblázat. Reálkibocsátás, -bérek, -nyugdíjak és hányadosuk 2000–2009, kombinált indexálás

	GDP	Nettó bér	Nyugdíj	
Év	reálváltozási üteme			Helyettesítési arány
t	$100(G_t^y-1)$	$100(G_t^v-1)$	$100(G_t^b-1)$	$\gamma_t=\bar{b}_t/v_t$
2000	4,2	1,5	2,6	0,591
2001	3,8	6,4	6,6	0,591
2002	4,5	13,6	9,8	0,573
2003	3,8	9,2	8,5	0,568
2004	4,9	–1,1	3,9	0,600
2005	4,4	6,3	7,9	0,611
2006	3,8	3,6	4,5	0,623
2007	0,4	–4,6	–0,3	0,668
2008	0,8	0,8	3,4	0,691
2009	–6,6	–2,3	–5,7	0,672

12.3. feladat. Föltéve, hogy $G_t \equiv G > 1$, a (12.11) képlet általánosításaként vezessük le az átlagos helyettesítési arányt vegyes indexáláskor:

$$\gamma=\beta\frac{1-G^{(\iota-1)T}}{GT(1-G^{\iota-1})}, \qquad \iota<1!$$

12.4. feladat. A 12.4. táblázat szerkezetét követve számoljuk ki $\iota=1/2$-re az átlagos helyettesítési arányt a bérnövekedési ütem függvényében!

A számítássorozat végére érve felhívjuk a figyelmet az elhanyagolt tényezőkre: a szabályok évről évre változtak. A korhatár folyamatos emelése miatt a szolgálati idő, s ezen keresztül a járadékszorzó nőtt, a rendszer egyenlegét a népesség öregedése rontotta. A kereseti különbségek felerősödése és az ezekkel korreláló várható élettartam polarizálódása elkerülhetetlenné teszi a nyugdíjszabály tompítását. Kérdéses a különféle hatások eredője.

13. A jelzáloghitel elemi modelljei

A hitelek a gazdaságban jelentős szerepet játszanak, és matematikai modellezésük sem csupán könyvelőknek való feladat. Különösen nehéz probléma a hosszú távú hitelek (jelzálog-, diákhitelek stb.) tervezése, hiszen az évtizedekre terjedő törlesztési folyamat során nagyon megváltozhat a hitelfelvevők pénzügyi helyzete: a reáljövedelmek, a kamatlábak, és az árfolyamok. Jelzáloghitelnek nevezik a lakásvételt fedező kölcsönt; ha az adós tartósan elmarad a törlesztéssel, akkor a lakás a bank tulajdonába megy át.

A jobb megértés érdekében egy egyszerű számpéldán szemléltetjük a jelzáloghitel jelentőségét. Vegyünk egy fiatal családot 2003-ból, amelynek nettó jövedelme havi 150 eFt, és szerény bérlakásukért 50 eFt-nyi lakbért fizetnek. Van már 5 mFt-os megtakarításuk, és szeretnének felvenni 10 mFt-os jelzáloghitelt, hogy egy 15 mFt-os lakást vegyenek maguknak. Ha 20 évre kamatmentes hitelt kapnának, akkor évi 500 eFt-ot, azaz havi 41 eFt-ot kellene törleszteniük, kicsit még kevesebbet, mint a lakbér. 2004 és 2008 között a svájci frank alapú jelzáloghitel kamatmentes hitelnek tűnt a magas kamatlábú forint hitelekhez képest, különösen akkor, ha a hitelfelvevő eltekintett a tetemes kezelési költségtől és a fenyegető árfolyamkockázattól. A szomorú folytatást később írjuk le.

Ebben a fejezetben röviden bemutatjuk a jelzáloghitel törlesztési folyamat három legegyszerűbb modelljét. A 13.1. alfejezetben a *hagyományos jelzáloghitelt* modellezzük, ahol a törlesztési pálya tervezésénél nem veszik figyelembe, hogy az infláció miatt a törlesztési pálya reálértékben orrnehéz, mert a nominális (folyóáras) törlesztési részlet időben állandó. A 13.2. alfejezetben bemutatjuk az ún. *kettős indexálású jelzálog* (angolul: Dual Indexed Mortgage, röviden: DIM) modelljét, ahol az infláció figyelembevétele miatt a törlesztési részlet vásárlóértéke időben állandó. A 13.3. alfejezet a *devizaalapú jelzáloghitel* modelljét elemzi, amelyben a forinthitel és törlesztése egy árnyékként számolt devizaalapú hitel és -törlesztés átváltásából adódik. A 13.4. alfejezetben érintjük az időben változó kamatlábak okozta bonyodalmakat.

A képletek egyszerűsítése miatt kamatláb helyett kamategyütthatóval (1+kamatláb), inflációs ráta helyett inflációs együtthatóval (1+inflációs ráta) számolunk. Ugyanezért eltekintünk a kamatláb, az inflációs ráta és a forintárfolyam időbeli változásától. (Figyelem: ha a svájci frank forintárfolyama növekszik, akkor a forint gyengül.)

13.1. Hagyományos jelzáloghitel

A hiteltörlesztési folyamatot általában folyó áron – az infláció figyelembevétele nélkül – tervezik a bankok. Legyen $D_0 > 0$ a hitel kezdőértéke, $T > 1$ a törlesztési (vagy futam)idő és legyen $t = 1, 2, \ldots, T$ a hiteltörlesztési időszakok (általában hónap, de itt év) indexe. A t-edik időszak (végi) törlesztése B_t, az időben állandó időszaki kamategyüttható (= 1+kamatláb) R, és az időszakvégi adósság D_t.

Definíció szerint minden évre igaz a következő azonosság: év végi adósság = tavalyi adósság + éves kamat – éves törlesztés. Szimbólumokkal:

$$D_t = RD_{t-1} - B_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T-1, T, \qquad D_0 \quad \text{adott.} \tag{13.1}$$

Figyelem: a köznyelv gyakran kamatnak nevezi a kamatlábat, holott az első $(R-1)D_t$, a második $R-1$.

Szükségünk lesz a (B_t) törlesztési sorozat *jelenértékére*, amelyet angol kezdőbetűi nyomán (present value) PV-vel rövidítünk. Definíció szerint a törlesztési pénzfolyamat jelenértéke az a szám, amelynek megfelelő tőkét elhelyezve a hitel felvételekor a bankban, és a hitelkamatlábbal kamatoztatva az esedékes törlesztésekig, a hitelfelvevő éppen tudná törleszteni a hitelt. Könnyen igazolható a

13.1. segédtétel. *A (B_t) törlesztési sorozat jelenértéke időben állandó $R-1$ kamatláb esetén*

$$\mathrm{PV} = \frac{B_1}{R} + \frac{B_2}{R^2} + \cdots + \frac{B_T}{R^T}. \tag{13.2}$$

Bizonyítás. Gondoljuk azt, hogy a hitel felvételekor a hitelfelvevő T darab kamatozó bankbetétet képez, és a t-edikbe betesz $R^{-t}B_t$ forintot, $t = 1, \ldots, T$. A kamatos kamat miatt a t-edik időszak végére a t-edik betét éppen B_t-re duzzad, tehát a hitelfelvevő ebből tudja fizetni az esedékes törlesztést. Ha összeadjuk a „bankbetétek” kezdőértékét, adódik (13.2). □

Észszerű feltevés, hogy a hitelérték éppen a törlesztési sorozat jelenértéke: $D_0 = \mathrm{PV}$. A valóságban azonban a kamatlábrés (= hitelkamatláb –betéti kamatláb) miatt a hitelkamatláb gyakran jóval nagyobb, mint a betéti kamatláb. A jelzáloghitel esetében azonban a kamatlábrés nem túl jelentős.

A hagyományos hitelnél időben változatlan a törlesztés: $B_t \equiv B$. Igaz a

13.1. tétel. *A T futamidő esetén a $D_0 > 0$ nagyságú hitel időben állandó törlesztőrészlete*

$$B = \frac{(R-1)D_0}{1 - R^{-T}}, \qquad R > 1. \tag{13.3}$$

Bizonyítás. $B_t \equiv B$ esetén (13.2)-ben alkalmazható a mértani sorozat összegképlete:

$$D_0 = \mathrm{PV} = R^{-1}\frac{1 - R^{-T}}{1 - R^{-1}}B. \tag{13.4}$$

Rendezéssel adódik (13.3). □

A valóságban a kamategyüttható idővel változik, s e miatt a változtatható kamatlábú hitelek esetében a bank akár minden időszakban újraszámolhatja az esedékes törlesztési részletet, miközben felteszi, hogy a kamategyüttható a következőkben már nem változik. Ezzel a fontos bonyodalommal azonban csak a fejezet végén foglalkozunk.

A következő feladat egy szakemberek által is gyakran figyelmen kívül hagyott jelenséget világít meg.

13.1. feladat. Jelölje $B(T)$ a T futamidőhöz tartozó törlesztést. Igazoljuk közvetlenül (13.3) segítségével, hogy $R > 1$ esetén a futamidő növelésével a fordított arányosnál lassabban csökken az éves törlesztő részleg, tehát növekszik a teljes törlesztési összeg:

$$B(T+1) > \frac{B(T)T}{T+1}, \qquad \text{azaz} \qquad TB(T) < (T+1)B(T+1)!$$

Egyszerűsége miatt érdemes az öröktörlesztést külön is bemutatni.

13.1. példa. Ha a törlesztési idő végtelen: $T = \infty$, akkor

$$B(\infty) = (R-1)D_0 \qquad \text{és} \qquad D_t = D_0. \tag{13.3'}$$

Ebből is leolvasható, hogy a változatlan örökös törlesztőrészlet a kamattal egyenlő. Az is látszik, hogy 2004-ben nagyobb, például 10%-os éves kamatláb esetén gyakorlatilag már az első évben képtelenség lett volna egy 10 mFt-os hiteltörlesztést elkezdeni, hiszen csak az éves kezdőrészlet 1 mFt-ra rúgott volna, miközben az éves nettó jövedelem csak 1,8 mFt volt.

A jelzáloghitel egyik legnagyobb problémája, hogy modern gazdaságban – a válságoktól, valamint a 2013 és 2016 közti időszaktól eltekintve – az általános árszínvonal emelkedése (köznapi nyelven: az infláció) nem hanyagolható el (vö. 12.2. tábblázat). Sőt, a 13.3. alfejezetben tárgyalt devizaalapú hiteleknél az árfolyamváltozások is hatnak.

Ahhoz, hogy jobban megértsük a kérdést, bemutatunk néhány inflációs és árfolyam-idősort. Legyen P_t és P_t^* a 2004-től kezdve számított hazai és svájci *halmozott árindex*, másképp: *árszint*; $p_t = P_t/P_{t-1}$ és $p_t^* = P_t^*/P_{t-1}^*$ az éves árindex, valamint E_t a CHF–HUF éves nominális árfolyam, $F_t = E_t P_t^*/P_t$ pedig az inflációval korrigált reálárfolyam. Ekkor a 13.1. táblázat mutatja az éves és a halmozott forint és frank árindexet, valamint a nominális és reálárfolyamot. Például 2013-ban a hazai és a svájci árindex 60,8, illetve 5,8%-kal volt magasabb, mint 2003-ban, míg a frank árfolyama a 2004-es 159,3-ról 242 forintra ugrott. A reálárfolyam sokkal kevesebbet nőtt: 150,4-ről csupán 159,3-re, ha 2003-as forintban és svájci frankban számolunk.

13.1. táblázat. Magyar (HUF) és svájci (CHF) idősorok, 2004–2013

	Forint			Svájci frank		
Év	Éves árindex (HUF)	Halmozott árindex (HUF)	Nominál HUF/CHF árfolyam	Éves árindex (CHF)	Halmozott árindex (CHF)	Reál HUF/CHF árfolyam
t	$100(p_t-1)$	P_t	E_t	$100(p_t^*-1)$	$100P_t^*$	F_t
2004	6,8	106,8	159,3	0,8	100,8	150,4
2005	3,6	110,6	162,3	1,2	102,0	149,6
2006	3,9	115,0	157,0	1,1	103,1	140,7
2007	8,0	124,2	152,4	0,7	103,8	127,4
2008	6,1	131,7	177,8	2,4	106,3	143,5
2009	4,2	137,3	182,3	–0,5	105,8	140,6
2010	4,9	144,0	222,7	0,7	106,6	164,8
2011	3,9	149,6	255,9	0,2	106,8	182,7
2012	5,7	158,1	241,0	–0,7	106,1	161,7
2013	1,7	160,8	242,1	–0,2	105,8	159,3

Az inflációs hatás vizsgálatában visszatérünk a változó törlesztőrészletű pályához: (B_t). Legyen az időben állandó (technikai egyszerűsítés) inflációs együttható (=1+inflációs ráta): p, és a t-edik időszakvégi halmozott árindex (árszint): $P_t = p^t$, $P_0 = 1$. Osszuk el a (13.1) egyenlet mindkét oldalát $P_t = pP_{t-1}$-gyel:

$$\frac{D_t}{P_t} = \frac{R}{p}\frac{D_{t-1}}{P_{t-1}} - \frac{B_t}{P_t}. \tag{13.5}$$

Ezen a ponton bevezetjük a reálkamat-együtthatót (r), a reáltörlesztést (b_t) és a reáladósságállományt (d_t):

$$r = \frac{R}{p}, \qquad b_t = \frac{B_t}{P_t} \qquad \text{és} \qquad d_t = \frac{D_t}{P_t}. \tag{13.6}$$

A korábbi változókat *nominális* jelzővel különböztetjük meg reáltársaiktól. Figyeljük meg, hogy (13.6)-ban a nominális kamategyütthatót az éves inflációs együtthatóval osztottuk, a törlesztőrészletet és az adósságot viszont az árszinttel.

(13.6) segítségével (13.5) egyszerűsíthető:

$$d_t = rd_{t-1} - b_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \qquad d_0 = D_0 \qquad \text{adott.} \tag{13.7}$$

Szóban: idei év végi reáladósság = tavalyi év végi reáladósság + éves reálkamat – éves reáltörlesztés.

Kitérőként megemlítjük, hogy rossz beidegződésként a közgazdászok a reálkamatlábat gyakran azonosítják a nominális kamatláb és az inflációs ráta különbségével. Ez azonban csak néhány százalékos inflációs ráta esetén fejszámolásban elfogadható közelítés (6.1. segédtétel), amikor

$$r - 1 = \frac{R}{p} - 1 = \frac{R-p}{p} \approx (R-1) - (p-1), \qquad \text{ha} \qquad p \approx 1.$$

A képletek jobb megértését számpéldákkal segítjük. Alapadatok: a hitel futamideje: $T = 20$ év, a hitel összege: $D_0 = 10$ mFt (millió forint).

Bár a nominális kamatláb és az inflációs ráta részben független egymástól, szemléltetésünkben célszerű a reálkamat-együtthatót rögzíteni: $r = 1{,}06$. A 13.2. táblázatban azt nézzük meg, hogyan hat az inflációs ráta növekedése az éves nominális törlesztési részletre. Állandó árszintnél a törlesztés 872 eFt (ezer forint), évi 6%-os inflációnál a nominális részlet már 1369 eFt – ez már kifizethetetlen, figyelembe véve a 2004-es hazai jövedelemviszonyokat. Persze, az évek múltával a törlesztés reálértéke egyre inkább csökken. Nulla infláció esetén a záró törlesztés reálértéke is 872 eFt, s 6%-os infláció esetén 427 eFt-ra csökkenne, ha folyamatosan kifizethető lett volna.

13.2. táblázat. Az infláció hatása az éves induló és záró törlesztésre, eFt

Inflációs együttható p	Nyitó évi-törlesztés B	Záró évi reál-törlesztés b_T
1,00	872	872
1,01	948	777
1,02	1 028	692
1,03	1 110	614
1,04	1 194	545
1,05	1 280	483
1,06	1 369	427

Megjegyzés. Reálkamat-együttható: $r = 1{,}06$; nominál kamat-együttható: $R = rp$, záró törlesztés reálértéke: $b_T = B/p^T$.

13.2. Kettősen indexált hitel

1975 körül Franco Modigliani (Nobel-díjas amerikai közgazdász) választ keresett a gyors infláció okozta kezdeti jelzálog-törlesztési gondokra. Megoldásként az ún. *kettősen indexált hitelt* javasolta, ahol nemcsak a reálkamat-együttható, hanem a b_t reáltörlesztés is állandó: $r_t = r$ és $b_t = b$. Ekkor (13.7) tovább egyszerűsödik:

$$d_t = rd_{t-1} - b, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \qquad d_0 \qquad \text{adott.} \tag{13.8}$$

A 13.1. tétel helyére lép a

13.2. tétel. *Ha a reálkamat-együttható állandó, és a bank úgy állapítja meg az esedékes hiteltörlesztést, hogy a reáltörlesztés minden időszakban állandó legyen (DIM), akkor a reáltörlesztés*

$$b = \frac{(r-1)D_0}{1 - r^{-T}}, \qquad r > 1; \tag{13.9}$$

míg a reáladósság (13.8) szerint alakul.

Visszatérünk a 13.1. példánkhoz.

13.2. példa. Ha a törlesztési idő végtelen: $T = \infty$, és kettősen indexált törlesztést alkalmaz a bank, akkor a törlesztőrészlet reálértéke

$$b(\infty) = (r-1)d_0. \tag{13.3''}$$

Ebből leolvasható, hogy ilyenkor a változatlan reálértékű törlesztőrészletnek a hitelhez viszonyított aránya a reálkamatlábbal egyenlő. Alacsony éves reálkamatláb esetén még magas nominálkamatláb mellett is törleszthető a kezdőrészlet, de a tartozás nominális értéke sokáig növekszik, ellenben reálértékben természetesen csökken:

$$D_1 = rpD_0 - p(r-1)D_0 = pD_0 < RpD_0.$$

A 13.3. táblázatban azt vizsgáljuk, hogyan hat a reálkamat-együttható emelkedése a kettősen indexált hitel (DIM) törlesztésére. 0%-os reálkamatlábnál fejből tudjuk az évi törlesztést: 10 mFt/20 = 500 eFt; 3%-os reálkamatlábnál az éves törlesztés nominális értéke 672 eFt, de 6% esetén már 872 eFt! (a 13.2. táblázat 1. sora).

13.3. táblázat. A reálkamatláb hatása az éves törlesztésre: DIM

Reálkamat-együttható r	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06
Éves törlesztés (eFt) b	500	554	612	672	736	802	872

A 13.2. feladat az állandó nominális vagy reáltörlesztésű jelzáloghitel érdekes különbségét emeli ki.

13.2. feladat. Mutassuk meg, hogy a hagyományos hitelnél a nominális adósság időben monoton csökken, míg a kettős indexálású hitelnél a monotonitás csak akkor igaz, ha az inflációs együttható elegendően kicsi, nevezetesen ha

$$p < \frac{1 - r^{-T}}{1 - r^{-T+1}}!$$

Például $r = 1{,}03$ reálkamat-együttható és $T = 20$ évnyi törlesztési idő esetén az inflációs ráta legfeljebb csak 3,9% lehet: $p < 1{,}039$; hogy a tartozás monoton csökkenő legyen.

Egyébként a magyar diákhitel is a kettős indexálású hitelhez hasonlít, csak a futamidő változó és a törlesztőrészlet a mindenkori egyéni kereset rögzített százaléka. Állandó reálkereset esetén a diákhitel törlesztési pályája azonossá válik a kettős indexálású pályával.

13.3. Devizaalapú-hitel

Alacsonyabb és stabilabb (alig ingadozó) külföldi kamatlábak, valamint elhanyagolható külföldi infláció és a hitelfelvevőnek kedvező (túlértékelt) árfolyamok miatt számos országban a hazai valuta helyett valamilyen más ország devizája alapján számolják el a jelzálog- (és egyéb) hiteleket. (Túlértékeltnek nevezzük a hazai valutát, ha tartós eladósodást okoz, mert az import túl olcsó, és az export túl drága.)

Magyarországon 2004-től terjedt el a *devizaalapú hitelezés*, és az alacsonyabb kamatlábak és stabil árfolyam miatt a svájci frank nemcsak a forint-, de az eurókölcsönöket is kiszorította. 2008-ban azonban beütött a nemzetközi pénzügyi és gazdasági válság. Míg az euró forint árfolyama 2010-re 250-ről csak 300-ra (20%-kal) nőtt, addig a svájci franké 150-ről 250-re (67%-kal) ugrott. Emellett a devizakamatláb is nőtt (de ezzel nem foglalkozunk), míg a reálárfolyam 2007 és 2011 között 127 és 183 Ft között ingadozott.

Új modellünkben is állandó paraméterértékekre szorítkozunk, de a forint adósság helyére egyelőre a devizában kifejezett adósság lép (*-gal jelölve a devizában adott kamategyütthatót, adósságot és törlesztőrészletet):

$$D_t^* = R^* D_{t-1}^* - B_t^*, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \qquad 1 < R^* < R. \tag{13.10}$$

Mivel a *devizaalapú* hitelnél a devizában kifejezett adósságot (D_t^*) és a törlesztést (B_t^*) a bank minden időszakban forintra számítja át, ezért szükségünk lesz a külső valuta árfolyamára (a hazai valutában kifejezve): E_t és az egyszerűsítésként időben állandónak feltételezett relatív változására:

$$e = E_t / E_{t-1} > 1. \tag{13.11}$$

Beszorozzuk a (13.10) egyenlet mindkét oldalát E_t-vel, és így megkapjuk a (13.10) devizaadósság-dinamika forintban kifejezett alakját:

$$E_t D_t^* = e R_t^* E_{t-1} D_{t-1}^* - E_t B^*, \qquad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{13.12}$$

Például a svájci frankban kifejezett D_t^* tartozást E_t frank–forint árfolyammal beszorozva kapjuk meg a $E_t D_t^*$ forintosított adósságot.

Ekkor a devizáról a forintra átszámított (hullámos felülvonással megkülönböztetett) törlesztőrészlet és adósság rendre

$$\tilde{B}_t = E_t B_t^* \qquad \text{és} \qquad \tilde{D}_t = E_t D_t^*. \tag{13.13}$$

A 13.1. és a 13.2. tétel helyére most új tétel lép.

13.3. tétel. *A devizatörlesztés állandónak vett értéke*

$$B^* = \frac{(R^* - 1) D_0^*}{1 - R^{*-T}}, \tag{13.14}$$

a devizaadósság (13.10), míg a változó forintértékek rendre (13) szerint alakulnak.

Ahhoz, hogy összehasonlíthatóbbá tegyük a forint- és a devizaalapú hiteleket, érdemes bevezetni a devizaalapú hitel $\tilde{R} = eR^*$ forintosított kamategyütthatóját, (13.13) segítségével (13.12) átírható:

$$\tilde{D}_t = \tilde{R} \tilde{D}_{t-1} - \tilde{B}_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \qquad \tilde{D}_0 = D_0. \tag{13.15}$$

Hasonlítsuk össze a forintalapú adósság (13.1) differenciaegyenletét a devizaalapú adósság forintban kifejezett (13.15) differenciaegyenletével. Látható, hogy a két kamatláb pontosan akkor azonos, ha

$$R = \tilde{R}(= R^* e).$$

Ezt az esetet nevezik *fedezetlen kamatparitásnak*: a hazai kamategyüttható = külső kamategyüttható × árfolyam-együttható. Ekkor alacsony kamatlábaknál és lassú leértékelődésnél jó közelítéssel igaz, hogy a hazai kamatláb = külső kamatláb − árfolyamváltozási ütem. Bár ekkor az eltérő törlesztési folyamat miatt eltérő a két adósságdinamika, a két hitel jelenértéke azonos. Ha emellett a forint hazai értékvesztése párhuzamos a leértékelődéssel: $p = e$, azaz az $F_t = E_t P_t^* / P_t$ reálárfolyam $P_t^* \equiv 1$ esetén állandó, akkor különösen egyszerű az összehasonlítás: a devizaalapú hitel azonos a kettős indexálású forinthitellel. Általában a forinthitel hazai törlesztőrészlete reálértékben magasról indul, de erősen csökken; míg a devizaalapú hiteltörlesztés alacsonyabb szintről indul, de reálértékben állandó.

A jelenérték segítségével összehasonlíthatjuk a forint- és a devizaalapú hitelt is. Emlékeztetőül: $\mathrm{PV} = D_0$. Relatív árfolyammal dolgozva (egységnyinek véve a kezdőárfolyamot), azaz (13.11)–(13.13) segítségével

$$\tilde{\mathrm{PV}} = B^* \left(\frac{e}{R} + \cdots + \frac{e^T}{R^T} \right), \qquad \text{ahol} \qquad E_0 = 1.$$

Bevezetve a $\rho = R/e$ forint-ekvivalens deviza-kamategyütthatót, (13.14) segítségével a devizaalapú hitel forint-jelenértéke zárt alakban egyszerűen felírható:

$$\tilde{\mathrm{PV}} = \frac{R^* - 1}{1 - R^{*-T}} \frac{1 - \rho^{-T}}{\rho - 1} D_0,$$

amely pontosan akkor nagyobb vagy kisebb, mint eredeti forinttársa: PV=D_0, ha $\rho > R^*$ vagy $\rho < R^*$. Visszatérve az eredeti jelölésekre: a két feltételpár $R > R^* e = \tilde{R}$ vagy $R < R^* e = \tilde{R}$.

Harmadszor is megvizsgáljuk a legegyszerűbb esetet.

13.3. példa. Ha a törlesztési idő végtelen: $T = \infty$, és devizaalapú hitelt alkalmaz a bank, akkor a t-edik időszak törlesztőrészletének deviza- és forintértéke rendre

$$B^*(\infty) = (R^* - 1) D_0 \qquad \text{és} \qquad \tilde{B}_t = E_t (R^* - 1) D_0 = E_t B^*(\infty). \tag{13.3*}$$

Ebből leolvasható, hogy ilyenkor a változatlan deviza törlesztőrészletnek a hitelhez viszonyított aránya a devizakamatlábbal egyenlő. Reálisabban: kellően hosszú törlesztési idő és alacsony devizakamatláb esetén komolyabb hitelt is lehetséges törleszteni, feltéve, hogy a leértékelődés az inflációhoz és a nominális (folyó áron számolt) jövedelmi pályához képest nem túl gyors.

A 13.4. táblázatban rögzítjük a forint reálkamat-együtthatóját is: $R = R^* p$, s a két hitelfajtát összehasonlítva három típust vizsgálunk: *a)* 1. sor – az árfolyam állandó: $e = 1$, tehát a devizaalapú eszmei kamatláb kisebb, mint a forintkamatláb: $eR^* < R$; *b)* 4. sor – a leértékelődés követi az inflációt: $e = p$, és a devizaalapú eszmei kamatláb egyenlő a forintkamatlábbal: $eR^* = R$; *c)* 6. sor – a forint leértékelődése gyorsabb, mint az infláció: $e > p$, és a devizaalapú eszmei kamatláb nagyobb, mint a forintkamatláb: $eR^* > R$. Az a) eset a 2004–2008-as helyzet, a c) eset a 2009-től kialakuló helyzet *stilizált* képe, és a b) eset a kettő között egy simább átmenet. Számszerűen: $R^* = 1{,}06$; $p = 1{,}06$;

$R = R^*p = 1{,}1236$; $e(a) = 1$, $e(b) = R/R^* = 1{,}06$ és $e(c) = 1{,}1$. A többi sor átmenet a tiszta típusok között.

A forinthitel kezdőrészlete 1369 eFt, záró reálértéke csupán 427 eFt (egyben a 13.2. táblázat utolsó sora). A devizaalapú hitel kezdőrészlete mindhárom esetben 872 eFt. A kedvező esetben a záró reálérték 272 eFt, a hitel jelenértéke csak 6,368 mFt. A kedvezőtlen esetben a záró reálérték 1 829 eFt, a jelenérték viszont elképesztő: 14,058 mFt. A semleges esetben a törlesztés reálértéke változatlan, és a jelenérték megegyezik a hitellel.

13.4. táblázat. A devizaalapú hitel és a forint leértékelődése

Leértékelődési együttható e	Záró reáltörlesztés (eFt) $\tilde{b}_T$	Devizaalapú-hitel jelenértéke (mFt) $\tilde{\text{PV}}$
1,00	272	6,368
1,02	404	7,344
1,04	596	8,535
1,06	872	10,000
1,08	1 267	11,810
1,10	1 829	14,058

Megjegyzés. $R^* = 1{,}06$, $p = 1{,}06$ és $R = 1{,}1236$. A devizaalapú hitel kezdőtörlesztése: $\tilde{b}_1 = 872$ eFt, a forinthitelé $B_1 = 1369$ eFt

A viharos árfolyamromláson kívül még az $R_t - e_tR_t^*$ kamatlábrés tágulása is sújtotta a magyar adósokat, miközben szűkülése segítette a lengyel adósokat. Ez hasonlóan hatott, mint a 13.3. táblázatban tárgyalt forint reálkamatláb emelkedése.

A 13.5. táblázatban egyszerű idősorral mutatjuk meg a devizaalapú hitel gyors hazai elterjedését. Az összes és a devizaalapú hitelállomány 2003 végén a GDP 10,7 és 0,5%-a volt, s ez 2008 végére felugrott 27,4 és 19,2%-ra. A válság hatására a folyamat megfordult, és 2014-től a devizaalapú hitelezés lényegében megszűnt.

13.5. táblázat. Forint- és frankalapú hitelek állománya/GDP: HU, 2003–2013

	Összes	Deviza-alapú		Összes	Deviza-alapú
Év	hitel		Év	hitel	
2003	10,7	0,5	2009	28,9	20,1
2004	12,6	1,8	2010	30,7	21,5
2005	15,3	5,0	2011	29,2	19,7
2006	18,5	9,0	2012	24,2	14,3
2007	21,8	12,9	2013	22,2	12,6
2008	27,4	19,2			

Közelebb kerülnénk a 2004 és 2012 közötti magyar helyzet megértéséhez, ha időben változó paraméterű devizaalapú hitelt vizsgálnánk: egy nagyon kedvezőnek induló devizaalapú hitel (a 13.4. táblázat 1–2. sora) egy hirtelen változás miatt nagyon kedvezőtlenné válik (az 5–6. sor). Ennek szemléltetését az Olvasóra bízzuk.

13.4. Időben változó kamatlábak

A fejezet végéhez közeledve feloldjuk az állandó kamatláb (-együttható) feltevését. Először tegyük föl, hogy a forint kamategyüttható pályája (R_t). Ekkor a (13.2) jelenérték-képletben R^t helyett $R_1 \cdots R_t$ kerül. Számunkra a t-edik időszakban kezdődő szakasz érdekes, amelynek elején a tartozás értéke D_{t-1} és a nominálisan (folyóáron) rögzített törlesztőrészlet végig B_t^{R}-re van tervezve (racionális várakozás, N nem hatványkitevő). Ha a bank legalább közelítőleg ismerné a hátralévő időszak kamategyüttható-pályáját (racionális várakozás!), akkor a jelenérték-egyenlet

$$D_{t-1}^{\mathrm{R}} = \frac{B_t^{\mathrm{R}}}{R_t} + \frac{B_t^{\mathrm{R}}}{R_t R_{t+1}} + \cdots + \frac{B_t^{\mathrm{R}}}{R_t R_{t+1} \cdots R_T} \tag{13.16R}$$

lenne. A bankárok azonban nem estek a fejükre, és jobb híján a naiv várakozást alkalmazzák (N felső indexszel!): a mindenkori kamategyütthatót vetítik előre a hátralévő évekre, tehát

$$D_{t-1}^{\mathrm{N}} = \frac{B_t^{\mathrm{N}}}{R_t} + \frac{B_t^{\mathrm{N}}}{R_t^2} + \cdots + \frac{B_t^{\mathrm{N}}}{R_t^{T-t+1}} = B_t^{\mathrm{N}} \frac{1 - R_t^{t-T-1}}{R_t(1 - R_t^{-1})}, \tag{13.16N}$$

azaz

$$B_t^{\mathrm{N}} = \frac{R_t - 1}{1 - R_t^{t-T-1}} D_{t-1}^{\mathrm{N}}. \tag{13.17}$$

Természetesen a tényleges tartozást a várakozások beteljesedésétől függetlenül évről évre módosítják:

$$D_t^{\mathrm{N}} = R_t D_{t-1}^{\mathrm{N}} - B_t^{\mathrm{N}}. \tag{13.18}$$

Ha azonban R_t időben meredeken csökken (mint 1995 és 2003 között), akkor a naiv várakozás jelentősen előrehozza a törlesztési pályát.

A fejezet végéhez érve bemutatjuk, hogyan függött 2018. őszén a nominális kamatláb (pontosabban: a kezelési költséget is tartalmazó teljes hitelmegtérülési mutató, THM) a futamidőtől. (Ez bonyolítja a 13.1. feladatot.) Mivel a bankárok 2018-ban arra számítottak, hogy a hazai inflációs ráta emelkedik, ezért a futamidő növekedésekor a nominális kamatláb jelentősen emelkedik. A teljesség kedvéért a havi törlesztési időt is közöljük (forrás: www. portfolio hu/finanszirozas/hitel/ fix-torlesztes). Az adatok 10 mFt-os hitelre, illetve a legjobb és legrosszabb ajánlatra vonatkoznak.

13.6. táblázat. Nominális kamatláb és futamidő

Futamidő (év)	Bank	Nominális kamatláb %	Havi törlesztőrészlet (Ft)
$T = 10$	UniCredit	3,63	99 097
	Erste	4,95	105 285
$T = 15$	UniCredit	4,58	76 342
	Erste	6,16	84 332
$T = 20$	K&H	5,11	65 332
	OTP	7,00	76 232

14. Egy általános egyensúlyelméleti modell

A matematikai közgazdaságtan egyik csúcsteljesítménye az *általános* piaci egyensúly létezésének bizonyítása. A 14.1. alfejezetben a legegyszerűbb esetet mérlegeljük: a termelést elhanyagoljuk, és egy cseregazdaságra szorítkozunk, amelyben a már meglevő termékeket cserélik el a háztartások egymással. A csere célja: minden háztartás annyira javítsa a helyzetét, amennyire csak lehetséges. Részletesebben: minden háztartásnak van egy *hasznosságfüggvénye*, amely a csere utáni készletvektor (n darab szám rendezett együttese) monoton növekvő függvénye. Minden termék csere utáni összkészlete megegyezik a csere előtti összkészlettel. Minden háztartás csak addig nyújtózkodhat, ameddig a takarója ér, azaz egy feltételezett piaci árrendszerben a kezdőkészletek eladásából származó jövedelme megegyezik a végső készletek piaci értékével. Belátható, hogy megfelelő technikai feltevések mellett létezik legalább egy ilyen piaci árvektor és a hozzá tartozó optimális fogyasztási vektor rendszere. A 14.2. alfejezet két kivételt ismertet: (i) az aszimmetrikus információ esetén mutatja be, hogy az egyensúly gyakran nem létezik; (ii) a közjavak esetén (például közlekedési hálózat) az egyensúly kiszámítása/létrehozása bonyolultabb.

14.1. Általános egyensúly

Ebben az alfejezetben definiáljuk az általános egyensúly legegyszerűbb modelljét (amikor két termék és két fogyasztó létezik, valamint mindkét hasznosságfüggvény Cobb–Douglas-féle, vö. (14.4)), és igazoljuk a piaci egyensúly létezését, sőt kiszámítjuk a jellemzőit. (A 2.3. alfejezetben csak az egytermékes részpiac egyensúlyát vizsgáltuk.)

A feladat nehézségét a fixponttételeknél (vö. 7. fejezet) adódó körkörösség jelenti: egyrészt adott piaci áraktól függ az egyes partnerek vagyona és kereslete; másrészt a mérlegfeltételek megszabják az egyensúlyi piaci árakat. Ez a kettőség megjelenik a bizonyításban is.

Két szereplőnk indexe 1 és 2. Az egyes szereplők kiinduló készletpárja (v_1, w_1), illetve (v_2, w_2), nemnegatív számpárok, de mindkét kezdőkészletpárban legalább az egyik elem pozitív, és mindkét termékből pozitív összkészlet van. A jelölések egyszerűsítése érdekében olyan mértékegységeket választunk, hogy mindkét termék összkészlete egységnyi legyen:

$$v_1 + v_2 = 1, \qquad w_1 + w_2 = 1. \tag{14.1}$$

A piaci egyensúly egyidejűleg háromfajta követelményt jelent.

a) A csere révén a javakat újra elosztják: csak olyan (x_1, y_1) és (x_2, y_2) nemnegatív záró-készletpár fogadható el, amelyet a csere lehetővé tesz (vö. (14.1)):

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad \text{és} \qquad y_1 + y_2 = 1. \tag{14.2}$$

b) Mivel modellünkben nincs pénz, ezért árak helyett árarányokról beszélünk. Ha a két termék áraránya $p > 0$, akkor 1 egységnyi Y termékért p egységnyi X terméket kell adni. Feltételezzük, hogy mindkét szereplő a pozitív p árarány mellett ki tudja fizetni a cserét:

$$px_h + y_h = pv_h + w_h, \qquad h = 1, 2. \tag{14.3}$$

c) A közgazdaságtanban szinte általánosan elfogadott, hogy a döntéshozók maximalizálják célfüggvényüket, amely megmutatja, hogy a választott döntés mennyire jó (5. fejezet). Ismét az (5.5) alakú hasznosságfüggvényt maximalizálják a cserepartnerek, de a paraméterérték tipikusan függ a fogyasztótól:

$$U_h(x_h, y_h) = x_h^{\alpha_h} y_h^{1-\alpha_h}, \qquad h = 1, 2, \tag{14.4}$$

ahol α_h $(0 < \alpha_h < 1)$ mutatja az X termék relatív fontosságát a h-adik fogyasztó számára.

Ugyanakkor az 5.1. tétel szerint a parametrikus optimális megoldás [(5.4)]

$$x_h(p) = \alpha_h v_h + \frac{\alpha_h w_h}{p} \qquad \text{és} \qquad y_h(p) = (1 - \alpha_h)(pv_h + w_h), \qquad h = 1, 2. \tag{14.5}$$

14.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a (14.1)–(14.2) és a (14.3-1) egyenletből következik (14.3-2), ahol az -1 és -2 a megfelelő szereplőre utal!

Egyszerű számolással belátható, hogy ilyen egyensúlyi rendszer létezik.

14.1. tétel. *A kéttermékes, kétszereplős, Cobb–Douglas-féle hasznosságfüggvényű cseregazdaságban a piaci egyensúly létezik, és az egyensúlyi árarány*

$$p^* = \frac{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2}{1 - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2}, \tag{14.6}$$

míg az optimális fogyasztási párok $(x_h(p^*), y_h(p^*))$ *[(14.5)], ahol* $h = 1, 2$.

Bizonyítás. A fixponttétel már említett kettősége megjelenik a bizonyításban is. Tetszőleges p relatív ár mellett már meghatároztuk a h-adik szereplő optimális fogyasztási párját, most ezek segítségével felírjuk a piaci egyensúlyi relatív árra vonatkozó fixpontegyenletet.

Megismételve az 5.2. alfejezet eljárását, behelyettesítjük (14.5a)-t a (14.2a) mérlegfeltételbe:

$$1 = x_1(p) + x_2(p) = \alpha_1 v_1 + \frac{\alpha_1 w_1}{p} + \alpha_2 v_2 + \frac{\alpha_2 w_2}{p},$$

Rendezve p-re a fixpontegyenletet:

$$p(1 - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2,$$

azaz a (14.6) képletben szereplő p^* adódik, amelyet behelyettesítve (14.5)-be, adódik az egyensúlyi elosztás. □

Még ebben a kétszereplős–kéttermékes modellben is zavarja a megértést, hogy túl sok (négy) független paraméter van: $\alpha_1, \alpha_2, v_1, w_1$, ezért szemléltetés kedvéért több irányban is tovább specifikáljuk a modellt.

14.1. példa. Feltesszük, hogy kezdetben az 1. szereplőnek csak v-terméke van, a 2.-nek csak w: $v_1 = 1$, $w_1 = 0$ és $v_2 = 0$, $w_2 = 1$ (piaci specializáció). Ekkor az egyensúlyi relatív ár

$$p^* = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1},$$

valamint az egyensúlyi fogyasztási négyes

$$x_1^* = \alpha_1, \quad y_1^* = \alpha_2 \qquad \text{és} \qquad x_2^* = 1 - \alpha_1, \quad y_2^* = 1 - \alpha_2$$

– a fogyasztott mennyiség csak a másik fél preferenciájától függ.

Történetileg nevezetes példa a víz és a gyémánt paradoxona. A sivatagban az 1. szereplőnek csak (kevés) vize van, a 2. szereplőnek pedig csak gyémántja. Ekkor akármilyen reális paraméterértékekkel dolgozunk, a víz/gyémánt ár pozitív!

14.2. példa. A két fogyasztó hasznosságparaméter-értéke azonos: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Ekkor (14.1)–(14.2) miatt (14.6) leegyszerűsödik: $p^* = \alpha/(1-\alpha)$, valamint

$$x_h(p^*) = \alpha v_h + (1-\alpha)w_h \qquad \text{és} \qquad y_h(p^*) = \alpha v_h + (1-\alpha)w_h = x_h(p^*)$$

– a két termék optimuma mindkét fogyasztónál egyenlő (szimmetrikus), és a kezdőkészletek súlyozott átlagával egyenlő, függetlenül a preferenciasúlytól.

A 14.1. táblázaton mutatjuk be, hogyan függnek a kezdeti készletektől a végső készletek, miközben a két egyén preferencia-paramétere $\alpha_1 = 0{,}25$ és $\alpha_2 = 0{,}5$.

14.1. táblázat. Kezdeti készletek – végső készletek, Cobb–Douglas

Kezdeti készletek		Egyensúlyi ár	Végső készletek	
v_1	w_1	p^*	x_1^*	y_1^*
0,0	0,5	0,750	0,167	0,375
0,0	1,0	0,500	0,500	0,750
0,5	0,0	0,800	0,125	0,300
0,5	0,5	0,600	0,333	0,600
0,5	1,0	0,400	0,750	0,900
1,0	0,0	0,667	0,250	0,500
1,0	0,5	0,500	0,500	0,750

Szükségünk van még két fontos fogalomra. *1)* Egy elosztás Pareto-értelemben *javítás* egy másik elosztáshoz képest, ha minden részvevőnek legalább olyan jó, mint a másik elosztás, és legalább egyik részvevőnek határozottan jobb. *2)* Egy elosztást *Pareto-optimálisnak* nevezünk, ha nincs más, (14.2)–(14.3)-at kielégítő, *megengedett* elosztás, amely hozzá képest Pareto-javítás lenne. Figyelem: ha egy maharadzsától elvesszük vagyona felét, és 1 milió éhező között szétosztjuk, az nem Pareto-javítás, hiszen a maharadzsa jóléte csökken. Mégis legtöbben támogatunk egy ilyen újraelosztást. (A 3. fejezetben vizsgált Nash-egyensúlyban nincs „csere".) Kimondhatjuk az alaptételt.

14.2. tétel. *(1. jóléti tétel.) Pareto-értelemben a piacnál nincs jobb elosztási mechanizmus.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk. Tegyük föl, hogy van egy másik megengedett elosztás, jele $(\bar{x}, \bar{y})$, amelyik – a részvevőket alkalmasan indexelve – az 1. részvevőnek jobb, és a 2. részvevőnek legalább olyan jó, mint a piaci (x^*, y^*) elosztás. Mivel a részvevők nem ezeket választották, ezek a piaci árak mellett vagy drágábbak vagy legalább annyira drágák, mint a piaciak:

$$p^*\bar{x}_1 + \bar{y}_1 > p^* x_1^* + y_1^* \qquad \text{és} \qquad p^*\bar{x}_2 + \bar{y}_2 \geq p^* x_2^* + y_2^*.$$

Összeadva a két egyenlőtlenséget:

$$p^*(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) + \bar{y}_1 + \bar{y}_2 > p^*(x_1^* + x_2^*) + y_1^* + y_2^*.$$

Felhasználva a (14.2) megengedettségi feltételeket: $p^* + 1 > p^* + 1$ – ellentmondás. □

Kiemeljük, hogy a 14.2. tétel köznapi nyelven azt mondja, hogy ha egy jóindulatú diktátor más árakat vagy más fogyasztást írna elő, akkor legalább az egyik fogyasztó rosszabbul járna, mint a piaci elosztásnál.

Következik a piaci egyensúlyra vonatkozó fordított állítás:

14.3. tétel. *(2. jóléti tétel.) Megfelelő feltételek mellett, ha (x^*, y^*) Pareto-optimális elosztás, akkor létezik olyan (v, w) kiinduló állapot, amelyre (x^*, y^*) piaci egyensúly.*

A 14.3. tétel azt mondja, hogy ha a kormányzat változtatni akar az egyensúlyi elosztáson, akkor az árak helyett a jövedelmeket kell befolyásolnia.

A vázlatos bizonyítás az ún. *Edgeworth-dobozon* alapul (más hasznosságfüggvény esetén 14.2. és 14.3. ábra). Ez egy olyan téglalap, amelynek a bal alsó sarka az origó, a jobb felső sarka pedig $(1, 1)$. Az előbbiből mérjük fel az 1., az utóbbiból a 2. fogyasztó kezdő és végső készletét, és közömbösségi görbéjét. A (14.1)–(14.2) feltevések miatt közös (v_1, w_1), (x_1, y_1) pont jellemzi a 2. fogyasztó kezdő és végső választását is.

A (14.4) célfüggvények segítségével – mint szintvonalakat – meghatározzuk a közömbösségi görbéket az (x, y)-síkban, a rövidség kedvéért visszatérünk a $\beta_h = 1 - \alpha_h$ jelöléshez.

$$U_1(x_1, y_1) = x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} = c_1 \qquad \text{és} \qquad U_2(x_2, y_2) = x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} = c_2.$$

Kifejezve y_1-et és y_2-t mint x_1, illetve x_2 függvényét:

$$y_1(x_1) = \frac{c_1^{1/\beta_1}}{x_1^{\alpha_1/\beta_1}} \qquad \text{és} \qquad y_2(x_2) = \frac{c_2^{1/\beta_2}}{x_2^{\alpha_2/\beta_2}}.$$

A dobozba beillesztendő, a 2. fogyasztó változóit transzformálni kell:

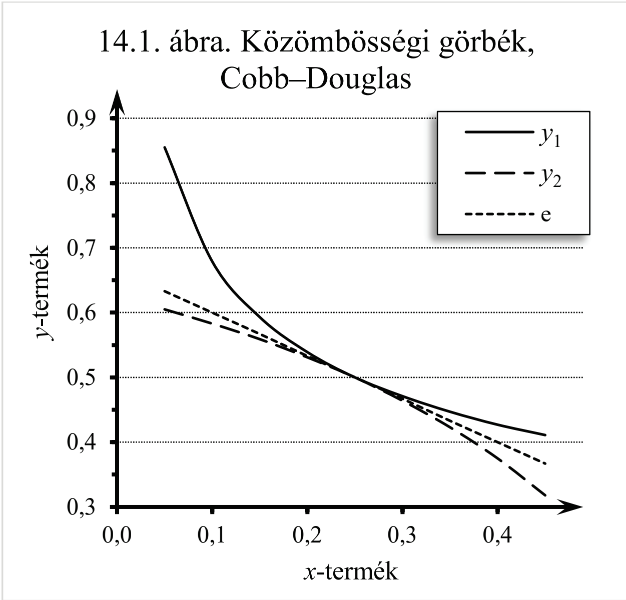
$$\tilde{y}_2 = 1 - y_2(x_2) = 1 - y_2(1 - x_1).$$

Megfelelő állandópárt választva, az $y_1(x_1)$ és az $\tilde{y}_2(x_1)$ közömbösségi görbe éppen az $(x_1^{\text{o}}, y_1^{\text{o}})$ egyensúlyi pontban érinti egymást:

$$c_1 = (x_1^{\text{o}})^{\alpha_1} (y_1^{\text{o}})^{\beta_1} \qquad \text{és} \qquad c_2 = (1 - x_1^{\text{o}})^{\alpha_2} (1 - y_1^{\text{o}})^{\beta_2}.$$

Az elválasztó érintő képlete $y_1 = y_1^{\text{o}} - p(x_1 - x_1^{\text{o}})$.

A 14.1. ábra készítésekor a 14.1. táblázat utolsó előtti (dőlt) sorából indulunk ki, $PE = (0{,}25; 0{,}5)$ pont a piaci egyensúly.



A következő példában az Edgeworth-doboz segítségével meghatározzuk a legegyszerűbb, de elfajult általános egyensúlyi feladatot.

14.3. példa. Két személynek kétféle termékből eredetileg 150–150 egysége van. (5.6)-féle hasznosságfüggvényük rendre $U_1(x_1, y_1) = \min[x_1, 2y_1]$, illetve $U_2(x_2, y_2) = \min[2x_2, y_2]$, azaz az 1. fogyasztónak egységnyi 1. termék kétszer olyan hasznos, mint a 2. terméké, és a 2. fogyasztónál fordítva.

a) Meghatározzuk a csereegyensúlyt.

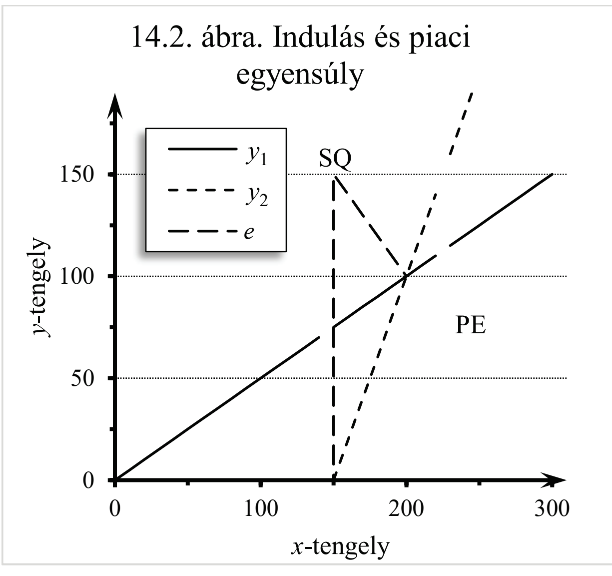
Az optimális elosztásokra a tökéletes helyettesíthetetlenség miatt fennáll $x_1 = 2y_1$ és $2x_2 = y_2$. A második optimalitási feltételbe behelyettesítve az $x_1 + x_2 = 300$ és $y_1 + y_2 = 300$ mérlegfeltételeket, adódik

$$600 - 2x_1 = 2(300 - x_1) = 300 - y_1 = x_1,$$

azaz

$$x_1^o = 200, \quad y_1^o = 100, \quad x_2^o = 100, \quad y_2^o = 200.$$

A 14.2. ábrán csak az 1. személy adatait mérjük az origóból, a 2. személy koordinátáit az az ún. Edgeworth-doboz ÉK-sarkából számítjuk. A piaci egyensúlyi helyzetet (PE), és a kiinduló állapotból (SQ) az egyensúlyba vezető utat (e egyenes) képviseli.



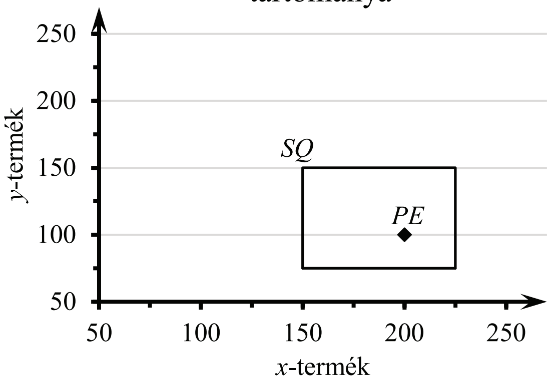
b) Rátérünk a Pareto-javítások tartományának meghatározására.

Az 1. egyént még nem éri veszteség, ha annyi Y termékről mond le, hogy 75 egység maradjon a tulajdonában, miközben megmarad 150 egységnyi X terméke. A 2. egyént még nem éri veszteség, ha annyi X termékről mond le, hogy 75 egység maradjon a tulajdonába, miközben megmarad 150 egységnyi Y terméke. E két szélsőség közt helyezkednek el a kiinduló helyzethez viszonyított Pareto-javítások:

$$x_1^{\mathrm{o}} \geq 150, \quad y_1^{\mathrm{o}} \geq 75, \quad x_2^{\mathrm{o}} \geq 75, \quad y_2^{\mathrm{o}} \geq 150.$$

A 14.3. ábrán egy téglalap képviseli az Edgeworth-dobozban a Pareto-javításokat.

14.3. ábra. Pareto-javítások tartománya



A számolás végére érve megemlítjük, hogy e tételek tetszőleges számú szereplőre és termékre is érvényesek. (Az előbbit könnyű, az utóbbit nehéz bizonyítani.) Tulajdonképpen az igazi piacon két szereplő nem is könnyen állapodik meg egymással, helyesebb azt képzelni, hogy nagyon sok egyforma 1, illetve 2. típusú szereplő van.

A következő példa 3 termék 3 szereplő közti cseréjét vizsgálja. Ez azért fontos, mert gyakran előfordul, hogy van két személy, aki nem akar egymással cserélni, de a harmadikkal már igen. (Az államszocializmus idején a kényszerű bilateralizmus volt az egyik legfontosabb gyengesége a Kölcsönös Gazdasági Segítség Tanácsának.)

14.3. példa. A harmadik termék kezdő készlete u_h, záró készletei z_h. Az 1. szereplőnek csak v-terméke van, és csak w-termékre vágyik. A 2. szereplőnek csak w-terméke van, és csak u-termékre vágyik. A 3. szereplőnek csak u-terméke van, és csak v-termékre vágyik. Könnyű belátni, hogy a piaci optimumban $y_1^{\mathrm{o}} = 1$, $z_2^{\mathrm{o}} = 1$ és $x_3^{\mathrm{o}} = 1$ és a többi komponens 0. Az egyensúlyi árak $p = q = r > 0$.

14.2. feladat. *a)* Általánosítsuk a (14.1)–(14.6) képleteket 2-ről H részvevőre! *b)* Miért nem könnyű az általánosítás $n > 2$ termékre? *c)* Hogyan oldható meg mégis a szimmetrikus preferenciájú n-termékes modell, ahol $\alpha_{i,h} = 1/n$, $i = 1, 2, \ldots, n$?

Sokkal bonyolultabb a bizonyítás, ha a célfüggvények nem olyan egyszerűek, mint a 14.1. tételben, de különösen, ha a fogyasztás mellett a termelést is modellezik. Az általános tételt Arrow–Debreu 1954-ben igazolta.

Külön, itt nem tárgyalható kérdés: hogyan lehet a sokszereplős és soktermékes piacon az egyensúlyt kiszámítani? Van-e olyan dinamikus piaci algoritmus, amelynek végeredménye az egyensúlyi árvektor?

14.2. Kivételek

Ez az optimalitási tételpár azonban csak súlyos megszorítások mellett alkalmazható. Ki kell zárnunk a következő bonyodalmakat. *a)* Tökéletlen verseny van: (kevés szereplő versenyez, ezért a piaci egyensúlyi mennyiségnél kevesebbet termelnek bizonyos termékből – 6.5. tétel). *b) Külső (externális) hatások* lépnek föl (például a vasgyártót nem kényszeríti az állam arra, hogy figyelembe vegye: az általa okozott környezetszennyezés másoknak kárt okoz; s ezért több vasat gyárt, mint ha kárpótolnia kellene a károsultakat). *c) Aszimmetrikus információ* jellemzi a biztosítást (például nem lehet jó egészségügyi biztosítást venni, mert az egészségesek nem hajlandók az átlagos kockázatot megfizetni). *d) Közjavak* léteznek (például minden egyes állampolgár feleslegesnek érzi a teljes adó befizetését (8. fejezet), ha fogyasztó úgy érezheti, hogy semmi baj nem történik, ha egyedül ő nem fizet az országos járványelhárításért, a tv-műsorért stb., s ezért a termelők összességében az optimálisnál kevesebbet termelnek a közjavakból). *e)* Rossz adottságaik miatt sokan nem találnak a piacon tisztességes megélhetést, itt a Pareto-optimalitás nem segít. Két kivételt részletesebben tárgyalunk: az aszimmetrikus információt és a közjavakat.

Aszimmetrikus információ

Először összehasonlítjuk a kötelező és az önkéntes egészségügyi biztosítást, és Arrow (1963) nyomán olyan modellt készítünk, ahol az önkéntes rendszer létre sem jön. (Más eszközökkel vizsgáljuk e kérdést a 17.2. alfejezetben.) Rendezzük javuló egészségi állapot szerint sorba a népességet, és osszuk $n > 1$ egyforma létszámú osztályba az állampolgárokat; az i-edik osztály egy tagja éves tb-egészségügyi biztosításának költsége c_i, s ezek a számok szigorúan csökkenő sorozatot alkotnak:

$$c_1 > c_2 > \cdots > c_{n-1} > c_n > 0.$$

Megjegyezzük, hogy az egészségügyi kiadásokban nagyon nagy a kockázat: a népesség 5%-ára jut az ellátása 50%-a.

Ha a biztosításban mindenki részt vesz, akkor a tb alapelve szerint mind az n osztály az *átlagos* ellátási költséget fizetné:

$$\bar{c}_n = \frac{c_1 + \cdots + c_n}{n}.$$

Ha az i-edik osztály tagjai magánbiztosítást választanak, akkor annak díja jóval nagyobb, mint a tb-é: $d_i > c_i$, de ez is monoton csökken:

$$d_1 > d_2 > \cdots > d_{n-1} > d_n > 0.$$

Most kísérletképp tegyük önkéntessé a tb-részvételt, de a díj maradjon egységes. Elképzelhető, hogy $\bar{c}_n > d_n$, s ezért az n-edik osztály tagjai egységesen kilépnek a rendszerből, de a többi osztály tagjai bent maradnak. Ekkor azonban növekszik a maradék $n-1$ osztály átlagos biztosítási díja, sőt az $n-1$-edik típus magánbiztosítási díja fölé kerül:

$$\bar{c}_{n-1} = \frac{c_1 + \cdots + c_{n-1}}{n-1} > d_{n-1},$$

így már a 2. legegészségesebb, $n-1$ indexű osztály tagjainak sem éri meg a részvétel: $\bar{c}_{n-1} > d_{n-1}$, azok is kilépnek.

Tegyük föl, hogy az i-edik osztály magándíja éppen az i-edik osztály tb-költségének és az első i osztály átlagos tb-költségének a számtani közepe:

$$d_i = \frac{c_i + \bar{c}_i}{2}, \qquad \text{ahol} \qquad \bar{c}_i = \frac{c_1 + \cdots + c_i}{i},$$

azaz $c_i < d_i < \bar{c}_i$, $i = n, \ldots, 2$, azaz végül csak a legbetegebbek maradnak bent az önkéntes rendszerben (mint Haydn Búcsú szimfóniájában, amikor a fizetetlen zenészek egymás után távoztak a színpadról).

Közjavak

Eddig csak olyan javak fogyasztását modelleztük, amelyekből minden egységet egy időben csak egy személy (vagy háztartás) fogyaszthatott – ezeket *magánjavaknak* hívjuk. Vannak azonban olyan javak, amelyeket nagyszámú egyén egy időben fogyaszthat – ezek a *közjavak*.

Legegyszerűbb közjószág a jó levegő (kivéve, ha búvárkodunk vagy magas hegységekben túrázunk). Ha én jó levegőt fogyaszthatok egy adott helyen, akkor bárki más is ugyanezt teheti. Hasonló a hálózati tiszta ivóvíz és a rádióadás vagy a közúti közlekedés jelentős része. Ezeknek a javaknak az előállításának költségeit általában a közösség fedezi, és forrása átalánydíj vagy adó.

Bonyolultabb a helyzet a tv-adások zöménél, amelyeket csak előfizetéssel lehet igénybe venni. Kis forgalom esetén a közút közjószág. Nagy forgalom esetén érdemes lehet autópályát építeni, s egyes szakaszokat fizetővé tenni, de például a világvárosokat elkerülő szakaszok igénybevétele – a nagyvárosok tehermentesítése miatt – általában ingyenes (kivétel: Budapest). Környezeti hatások csökkentése miatt Németországban az autópálya igénybevétele ingyenes, másutt kapukkal vagy matricával teszik fizetővé. (Magyarországon először ingyenes volt az autópálya, majd kapus, és 2001 óta matricás.)

Sokáig a nyersanyagforrások is korlátlannak tűntek, ezért igénybevételükért a kitermelők csak mérsékelt díjat fizettek. Külön gondot okoz, hogy a fosszilis energiaforrások (szén, kőolaj, gáz) felhasználása miatt a légkörben felhalmozódó széndioxid – más szennyező anyagok mellett – a földi légkört veszélyesen felmelegíti. Ma már egyre világosabban látszik a nyersanyagkincsek korlátozottsága is, ezért egyre inkább előtérbe kerül felhasználásuk megadóztatása.

Még bonyolultabb a nagyvárosi közlekedés megszervezése. Itt egymással verseng a tömeg- és az egyéni autós közlekedés. A villamost gyakran fizikailag elválasztják az autós sávoktól, de külön buszsávok kialakítása viszonylag új fejlemény. További kérdés, hogy mennyire érdeke a csak autóval közlekedőknek támogatniuk a tömegközlekedést: gyorsabban haladhatnak és könnyebben parkolhatnak, ha a takarékosabb autósok buszra szállnak.

Legszemléletesebb példa a közlegelők tragédiája (Hardin, 1968). A középkorban a közlegelők minden helybeli állattenyésztő számára szabadon rendelkezésre álltak. De ha túl sok tehenet engedtek a legelőkre, akkor a legelő nem tudott regenerálódni, és az egyes tehenek kevesebbet tejet adtak. Először még nőtt az összes tej mennyisége, de egy bizonyos létszám fölött akár az összmennyiség is csökkenhetett. A 14.2. táblázat szemlélteti a helyzetet. Ha legfeljebb 9 tehén legel, akkor a tehenenkénti napi tejhozam 11 liter, de 10-nél már csak 10 liter, és 11-nél mindössze 9 liter. Ha 8-ról 9-re nő a tehenek száma, az összhozam 88-ról 99 literre nő, és még a 10. tehén beengedése is 100 literre növeli az összhozamot. De a 11. tehén beengedése már csökkenti az összhozamot is, ezért érdemes kizárni.

14.2. táblázat. A közlegelők tragédiája

Tehenek száma	Hozam	Összhozam
8	11	88
9	11	99
10	10	100
11	9	99

Akinek ez a példa túlságosan régimódi, annak a következő mai példát ajánlom a figyelmébe. A budai hegyvidék több része véleményem szerint túlzottan be van építve. Azok a hivatalnokok, akik engedték ezt a beépítettséget, úgy okoskodhattak, hogy az idetelepülőknek még mindig több zöld jut, mint amennyit előző lakhelyükön élvezhettek. Nem lehet pontosan definiálni, hogy mekkora beépítettség lett volna a társadalmi optimum, de összehasonlítás alapján érezhetem úgy, hogy a jelenleginél kevesebb.

15. Együtt élő nemzedékek modellje

A valóságos világ egyik fontos stilizált jellemzője, hogy kb. 30 évente kihal egy nemzedék, és helyére lép egy újabb. (Természetesen egy normális méretű országban minden nap születik és meghal legalább egy tucat ember. Az éves állománycserét is modelleztük a 12.3. alfejezet nyugdíjindexálási modelljében. Tehát a nemzedék fogalma durva, de hasznos egyszerűsítés.) A nemzedékek végtelen láncában furcsa helyzetek állnak elő, például a piaci egyensúly optimalitása (14.2. tétel) is felborul. Lényegében erről szól a halmazelmélet legismertebb paradoxona, amelyet a 20. század elejének matematikus óriása, Hilbert a következő népszerű alakban fogalmazott meg: egy végtelen számú egyágyas szobából álló teli szálloda képes még egy vendéget befogadni. Valóban, az n-edik szobában lakó n-edik vendéget tovább küldik az $n+1$-edik szobába, s ekkor a 1. szoba kiürül az új vendég számára. Erről szól az együtt élő nemzedékek általános egyensúlyi dinamikus modellje is, amelyben a cserélődő fiatal és idős nemzedékek jövedelme eltérő, hosszú távon állandó. Az 5.3. megtakarítási példát követve a fiatal nemzedék éppen annyit takarít meg, hogy időskorában a fogyasztása ugyanannyi legyen, mint fiatalkorában vol. Két feltevéssel élünk a kamatlábra irányuló várakozásra. A 15.1. alfejezetben racionális (a modellel összhangban lévő), a 15.2. alfejezetben pedig naiv (a jelent a jövőbe kivetítő) várakozást vizsgálunk

15.1. Dinamika racionális várakozások esetén

Minden időszakban (amelynek hossza kb. 30 év, indexe t) két felnőtt nemzedék él együtt: a fiatal és az idős. Eredeti jövedelmük rendre $y > z \geq 0$ (időben állandó), (c_t, d_t) fogyasztásuk időben változó. Legyen a kamategyüttható R_{t+1} (=1+kamatláb), amely a fiatalkori s_t megtakarítást időskorban $R_{t+1}s_t$ felélhető tőkévé alakítja.

a) Először az ún. *hosszmetszeti* feltételt vizsgáljuk.

Definíció szerint az egymást követő időszakok fogyasztása rendre

$$c_t = y - s_t \qquad \text{és} \qquad d_{t+1} = z + R_{t+1}s_t. \tag{15.1}$$

Ebben az alfejezetben feltesszük, hogy ezt a fiatal pontosan előrejelzi, várakozása *racionális*, azaz a várt kamatláb megvalósul, a modellel összhangban van. A számolás megkönnyítése kedvéért feltesszük, hogy a fogyasztó annyit takarít meg, hogy a fiatal- és időskori fogyasztása egyenlő legyen [vö. (5.6)]:

$$c_t = d_{t+1}. \tag{15.2}$$

Ekkor az optimális $s(R_{t+1})$ megtakarítás az adott R_{t+1} kamategyütthatótól a következőképp függ:

$$y - s_t = z + R_{t+1}s_t, \qquad \text{azaz} \qquad s_t = \frac{y-z}{1+R_{t+1}}. \tag{15.3}$$

b) A keresztmetszeti feltétel adott időszakban együtt élő két nemzedékre vonatkozik. Jelölje $\nu > 0$ a stabil népesség időszakos népességnövekedési együtthatót, ekkor igazolható a

15.1. tétel. *Racionális várakozás esetén a kamategyüttható-dinamika*

$$R_{t+1} = \nu - 1 + \frac{\nu}{R_t}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{15.4}$$

Megjegyzés. Figyelemre méltó, hogy (15.4) jobb oldala csökkenő függvény, ezért az R^o állandósult állapot fölötti/alatti kamategyütthatót a dinamika minden időszakban az állandósult érték alá/fölé viszi: oszcilláció.

Bizonyítás. Az ún. *keresztmetszeti* feltétel szerint a t-edik időszakban a fiatalok megtakarítása megegyezik az idősek extrafogyasztásával. Heurisztikus meggondolással a $t+1$-edik időszak $R_{t+1}s_t$ extrafogyasztása helyére egy időszakkal visszatolva, $R_t s_{t-1}$-et írunk. Mivel minden idősre ν fiatal jut, az egy idősre jutó egyenleg két oldala νs_t és $R_t s_{t-1}$:

$$\nu s_t = R_t s_{t-1}. \tag{15.5}$$

Behelyettesítve (15.3b)-t $t+1$ és t-re (15.5)-be:

$$\nu \frac{y - z}{1 + R_{t+1}} = \frac{(y - z)R_t}{1 + R_t}.$$

Feltéve, hogy $y \neq z$, egyszerűsítünk $y - z$-vel, és reciprokot veszünk:

$$\frac{1 + R_{t+1}}{\nu} = \frac{1 + R_t}{R_t}, \tag{15.6}$$

azaz (15.4) áll. □

Most pedig igazoljuk az állandósult állapot létezését általában és stabilitását növekvő létszámú stabil népességre.

15.2. tétel. *Stabil népesség és racionális várakozás esetén a (15.4) dinamika állandósult állapota $R^o = \nu$, s ez aszimptotikusan stabil, ha a népesség növekszik: $\nu > 1$.*

Megjegyzés. A $\nu > 1$ feltevés szükséges is az aszimptotikus stabilitáshoz, hiszen $\nu < 1$ esetén $R_0 \approx \infty$ esetén $R_1 < 0$ lenne. $\nu = 1$ esetét a 15.1. példa tárgyalja.

Bizonyítás. *a)* (15.4)-ből $R_t = \nu$ behelyettesítéssel adódik $R_{t+1} = \nu$:

$$\nu = \nu - 1 + \frac{\nu}{\nu}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{15.4°}$$

A jobb oldal szigorú monotonitása miatt más pozitív gyök nincs.

b) A stabilitási bizonyítás alapötlete egyszerű: ahhoz, hogy a 7.2.* tételt alkalmazhassuk, az 1-lépéses helyett a 2-lépéses átmenetet kell vizsgálni. Először (15.4)-et időtlenné tesszük:

$$g(R) = \nu - 1 + \frac{\nu}{R}, \tag{15.7}$$

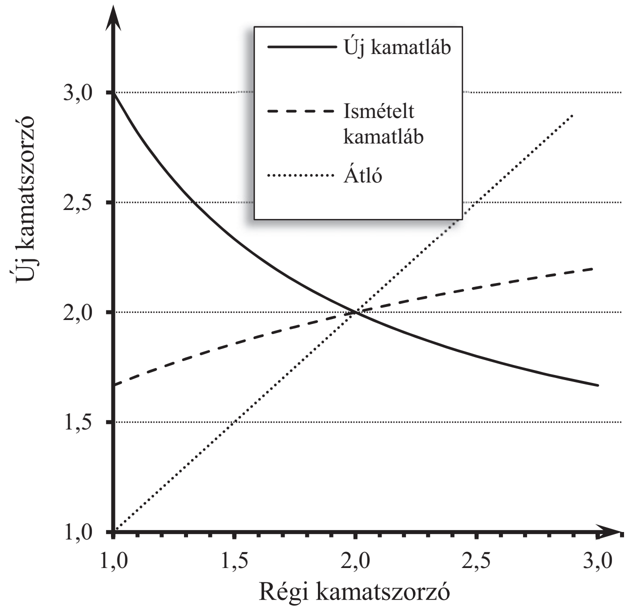
Bevezetjük g iteráltját (ismételt behelyettesítéssel kapott függvényét):

$$g(g(R)) = \nu - 1 + \frac{\nu}{\nu - 1 + \nu/R}. \tag{15.8}$$

Ez a függvény szigorúan monoton növekszik a $(0, \infty)$ szakaszon, egyetlen értelmes fix pontja szintén ν. A 7.2.* tétel szerint mind a páros, mind a páratlan sorozat konvergál ν-hez, tehát együtt is konvergálnak. □

A 15.1. ábra bemutatja a $g(R)$ és $g(g(R))$ görbét, valamint az $R_{t+1} = R_t$ átlót.

15.1. ábra. Egyszerű és ismételt dinamika racionális várakozásnál



15.1. példa. Figyelemre méltó, hogy a (15.4) kamategyüttható-dinamika a stabilitási tartomány szélén, $\nu = 1$ esetén 2-ciklust ad, de elvész az aszimptotikus stabilitás! Valóban, ekkor $R_{t+1} = 1/R_t = R_{t-1}$, azaz

$$R_{2t} = R_0 \qquad \text{és} \qquad R_{2t-1} = \frac{1}{R_0}, \qquad t = 1, 2, \ldots .$$

15.1. feladat. Programozzuk be a (15.4) dinamikát $\nu = 2$-re $R_0 = 1$ és $R_0 = 3$ kezdőállapot esetén!

Végül egy egyszerű becslést adunk arra, hogy milyen gyorsan tart a kamatláb az állandósult értékéhez. A 7.4.* tétel bizonyítási gondolatmenetét alkalmazva, kivonjuk (15.4°)-t (15.4)-ből, s az eltérési változó dinamikáját vizsgáljuk:

$$R_{t+1} - \nu = \frac{\nu}{R_t} - 1 = \frac{\nu - R_t}{R_t}.$$

Feltéve, hogy $\nu > 1$, $R_0 < 1$ esetén R_{2t} monoton tart ν-höz, tehát elég nagy t-re $R_{2t} > 1$, és $R_{2t+1} > 1$ mindig teljesül. (Hasonló érvelés alkalmazható $R_0 > 1$-re.) Ezért

$$|R_{t+1} - \nu| \le |R_t - \nu|, \qquad t > T;$$

tehát minden időszakban az eltérés abszolút értéke csökken. Minél közelebb kerülünk az állandósult állapothoz, annál jobban érvényesül az elhanyagolt második tényező, $1/R_t$, azaz $1/\nu$ a zsugorító tényező.

15.2. Dinamika naiv várakozás esetén

Ebben az alfejezetben a modern közgazdaságban domináns szerepet játszó racionális várakozás helyett legegyszerűbb ellenpárként a *naiv* várakozást vizsgáljuk (lásd a 2.3. alfejezet sertésciklusát és a 6.4. alfejezet duopóliumát). Ekkor a szereplők az előző időszak tényleges kamatlábát vetítik ki a jelenre. A 30 éves időszak miatt mindkét várakozási feltétel egyformán irreális.

Belátjuk a következő tételt.

15.3. tétel. *Naiv várakozás esetén a kamategyüttható-dinamika*

$$R_t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\nu(1 + R_{t-1})}}{2}, \qquad t = 1, 2, \ldots. \tag{15.9}$$

Bizonyítás. A (15.4) feltételes megtakarítás és az időskori tőkefelélés helyére most rendre

$$s_t(R_t) = \frac{y - z}{1 + R_t} \qquad \text{és} \qquad \frac{(y - z)R_t}{1 + R_{t-1}}$$

kerül. Megfelelően módosítva a (15.3) keresztmetszeti feltételt:

$$\nu \frac{y - z}{1 + R_t} = \frac{(y - z)R_t}{1 + R_{t-1}}. \tag{15.10}$$

(15.10)-t rendezve a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$R_t^2 + R_t - \nu(1 + R_{t-1}) = 0. \tag{15.11}$$

A megoldóképletet felírva, és a pozitív gyököt megtartva adódik (15.9). □

Belátjuk, hogy ennek a rendszernek ugyanaz az $R^o = \nu$ az állandósult állapota, de aszimptotikusan stabil minden növekedési együtthatóra.

15.4. tétel. *a) A naiv várakozásos (15.9) dinamika állandósult állapota valóban $R^o = \nu$, b) s ez aszimptotikusan globálisan stabil.*

Megjegyzés. Figyelemre méltó, hogy a (15.9) dinamika nemcsak, hogy monoton növekszik, de emiatt az állandósult állapot fölötti/alatti kamategyütthatót minden időszakban az állandósult érték fölött/alatt hagyja, ezért a 7.2.* tétel közvetlenül alkalmazható.

Bizonyítás. *a)* Belátható, hogy a (15.9)-ből adódó

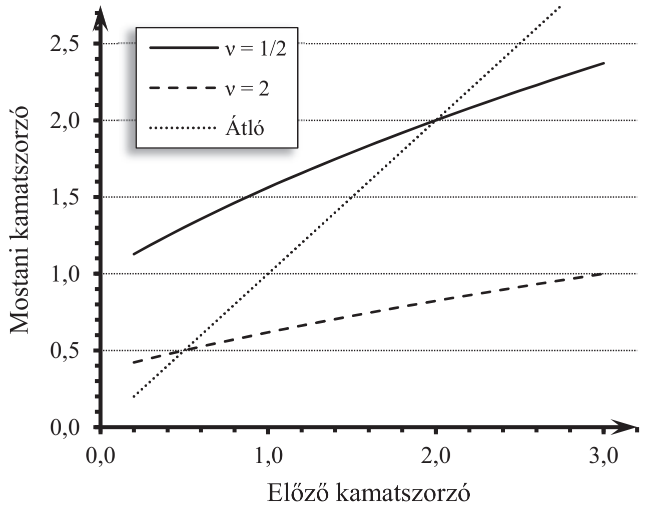
$$f(R) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\nu(1 + R)}}{2} \tag{15.12}$$

kamategyüttható-leképezés egyetlen fix pontja valóban ν. De a bonyodalmas számolás helyett elegendő a (15.11) állandósult állapotát, (15.4°)-et vizsgálni, ezt már korábban megtettük. Belátható, hogy $[0, \nu)$ képe $[0, \nu)$, s $[\nu, \infty)$-é $[\nu, \infty)$. A görbe konkáv.

b)* 7.2.* tétel következményének speciális esete. □

A 15.2. ábra bemutatja az $f(R)$ függvényt, $\nu = 1/2$-re és $\nu = 2$-re.

15.2. ábra. Két dinamika naiv várakozásoknál



15.2. példa. Figyelemre méltó, hogy a (15.9) kamategyüttható-dinamika $\nu = 1$ esetén sem ad 2-ciklust!

A 15.1. feladatot most a naiv várakozás feltevésére írjuk át!

15.2. feladat. Programozzuk be a (15.9) dinamikát $\nu = 2$-re az $R_0 = 1$ és az $R_0 = 3$ kezdőállapotra! Nézzük meg, hogy a racionális vagy a naiv várakozás mellett tart-e gyorsabban a pálya az egyensúlyhoz!

15.3. feladat. Programozzuk be a (15.9) dinamikát $\nu = 1/2$-re az $R_0 = 1$ és az $R_0 = 1/3$ kezdőállapotra!

Megjegyzések. 1. Az együtt élő nemzedékek modellje kiválóan alkalmas a tb és a magánnyugdíjrendszer modellezésére. Samuelson (1958) korszakalkotó cikke nyomán elfogadottá vált, hogy a tb-nyugdíjrendszer belső hozamát először a népesség növekedési ütemével, később a gazdaság növekedési ütemével azonosítsák, amelyben a munka-termelékenység növekedési üteme is megjelenik.

2. Ha a (15.2) szabály mögötti Leontief-féle hasznosságfüggvény helyébe reálisabb, nagyobb időbeli helyettesítést megengedő hasznosságfüggvényt írunk, akkor változik a stabilitási feltétel, és nemcsak elfajult esetben ($y = z$ esetén) jelenik meg a második állandósult állapot, amely maga az autarkia (önellátás): $s_t = 0$.

3. Csupán *két* együtt élő nemzedék feltételezése nagyon durva közelítés, és csak kvalitatív megállapítások származtatására alkalmas. A sok együtt élő korosztály általános modellje – belülről meghatározott kamatlábakkal – azonban nem fér bele a könyvbe, de a 12. fejezetben érintettük az $S+T$ korosztályos nyugdíjmodellt – 0-n rögzített kamatlábak mellett.

16. Valószínűség-számítási bevezetés

Ez a fejezet bevezetés a valószínűség-számításba: már ismert valószínűségű események bizonyos kombinációinak a valószínűségét számítjuk ki. A 16.1. alfejezet a valószínűség-számítás elemeit vázolja. A 16.2. alfejezet a valószínűség-számítás két alapfogalmát, a várható értéket és a szórást mutatja be. Ezek segítségével a 16.3. alfejezetben elvi jelentőségű felső becsléseket adhatunk annak a valószínűségére, hogy milyen gyorsan tart az érmék dobásszám-növelésekor a fejek (és hasonlóan az írások) relatív gyakorisága 1/2-hez (a nagy számok törvényei).

16.1. Elemek

Annak idején (1961 és 1965 között) a magyar középiskolában nem tanítottak valószínűség-számításra, de azóta a közoktatásban megjelent ez a téma is. A középiskolai valószínűség-számítás zöme a kombinatorikára épít, és olyan kérdéseket vizsgál, hogy például az ötös lottón mennyi a valószínűsége a telitalálatnak. Az Újszövetség is beszámol arról, hogy már a római katonák is játszottak kockajátékot, ti. kockát vetettek a keresztre feszített Krisztus köpenyére. Még egyszerűbb a pénzfeldobás, amikor írásra (I) vagy fejre (F) kell fogadni.

Meglepő módon azonban 1654-ig senki sem tudott megbízhatóan megoldani valószínűség-számítási feladatokat. Ekkor két francia matematikai lángész, Pascal és Fermat egymástól függetlenül megoldottak egy összetett valószínűség-számítási feladatot, s ezzel megszületett a valószínűség-számítás. A nevezett feladat ismertetése helyett egy olyan problémát mutatunk be, amelynek „megoldása” sokáig kétségeket ébresztett.

16.1. példa. Két egyforma érmével egyszerre dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy egymástól különböző eredményt kapunk? Ha képzeletben megszámozzuk az érméket, és 1, 2 sorrendben írjuk föl az eredményeket, akkor négy egyforma valószínűségű esemény létezik: FF, FI, IF és II, tehát az FI és IF együttes valószínűsége 1/2. Egyes források szerint sokáig még a legkiválóbb matematikusok sem ismerték fel, hogy az egyébként megkülönböztethetetlen FI és IF eseménypár most két elemi esemény, s ezért azt hitték, hogy hogy 3 egyenlő valószínűségi eseményünk van: egyenként 1/3 valószínűséggel.

Középiskolás szinten a valószínűség meghatározása előtt föl kell tennünk, hogy létezik egy n-elemű véges alaphalmaz (a biztos esemény): Ω, elemei $\omega_1, \ldots, \omega_n$ (az elemi események). Feltesszük, minden ω_i-nek van valószínűsége: $p_i > 0$, melyek összege 1:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + \cdots + p_n = 1.$$

Tetszőleges A esemény (részhalmaz) valószínűsége a tartalmazott elemek valószínűségének az összege:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i \in A} p_i.$$

Szükségünk van két halmaz *uniójának* (összegének) és *metszetének* (közös részének) a képletére:

$$A \cup B = \{\omega |\ \omega \in A \text{ vagy } \ \omega \in B\},$$

ahol a *vagy* nem kizáró, és

$$A \cap B = \{\omega |\ \omega \in A \ \&\ \omega \in B\}.$$

Szóban: az unió minden eleme legalább az egyik halmaz eleme, a metszet minden eleme mindkét halmaz eleme.

A 16.1. példa alapján azonban nem tehetjük föl, hogy Ω minden részhalmaza *megfigyelhető* (pl. az IF és az FI részhalmazok külön-külön nem figyelhetők meg). Ezért bevezetjük a *megfigyelhető halmazok ún. algebráját*: $\mathcal{A}$-t, amelynek bármely A és B elemére (ezek Ω részhalmazai), ezek uniója és metszete is benne van az algebrában.

Szükségünk lesz még A *kiegészítő* halmazára, amelynek pontosan azok az elemei, amelyek A-nak nem elemei:

$$\bar{A} = \Omega \backslash A = \{\omega |\ \omega \notin A\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

16.1. példa. (folytatás) Két megkülönböztethetetlen érme együttes feldobásakor megfigyelhető halmazok az üres és a teljes halmazon kívül: $IF \cup FI$, II, FF.

A valószínűség egy alaphalmaz bizonyos részhalmazain definiált, skalárértékű függvény, amely minden $A \in \mathcal{A}$-hoz egy $\mathbf{P}(A)$ nemnegatív számot rendel, amely legfeljebb 1, s emellett teljesülnek a következő összefüggések; ha két esemény egymást kizárja, akkor együttes valószínűségük a két valószínűség összege:

$$\text{ha} \qquad A \cap B = \emptyset, \qquad \text{akkor} \qquad \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B),$$

valamint a kizárható esemény valószínűsége 0, a biztosé 1:

$$\mathbf{P}(\emptyset) = 0 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Az ún. *klasszikus valószínűség-számításban* minden elemi esemény egyforma valószínűségű: $p_i \equiv 1/n$, és egy összetett esemény valószínűsége a kedvező és az összes események hányadosa: $p = k/n$. Legegyszerűbb példa, amikor a szimmetria sérül, az újszülöttek természetes megoszlása fiúkra és lányokra: 0,514 vs. 0,486. (Olyan társadalmakban, mint pl. a kínai vagy az indiai, ahol a fiúk értékesebbek, mint a lányok, ultrahangos vizsgálat utáni abortusz miatt a fiútöbblet sokkal erősebb lehet.)

Megjegyezzük, hogy ha végtelen halmazokat, például a természetes számok halmazát vagy a $[0, 1]$ szakaszt mérlegelnénk alaphalmazként, akkor nagyon bonyolult technikai részletekbe ütköznénk.

A legegyszerűbb véletlen esemény az, amely vagy bekövetkezik (siker), vagy nem (kudarc) – például, hogy egy kockával 6-ost dobok vagy érmével fejet. Legyen p egy 0 és 1 közötti szám; ha a siker bekövetkezésének a valószínűsége p, akkor elmaradásának valószínűsége $1 - p$. (Két fenti példában: $p = 1/6$, illetve $p = 1/2$).

A valószínűség-számításban alapvető fogalom két esemény függetlensége, amelyet itt a feltételes valószínűség megkerülésével határozunk meg. Legyen a két esemény A és B, egyedi és együttes valószínűsége rendre $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A \cap B)$. Azt mondjuk, hogy a két esemény egymástól *független*, ha együttes előfordulásuk valószínűsége az egyedi valószínűségük szorzata:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Számpélda. Tegyük föl, hogy egy magyar gimnáziumban az érettségizők 1/4-ének van középfokú francia nyelvvizsgája és 1/5-e jeles matematikából. Ha a két esemény független egymástól, akkor az érettségizők 1/20-ának van egyszerre francia nyelvvizsgája és matematika jelese. (A 20 fős osztályban 5 francia nyelvvizsga, 4 jeles matematikus van, és csak 1 francianyelvizsgás jeles matematikus.)

A 16.1. példában a két érmedobás eredménye egymástól független, s ha megszámoztuk volna az érméket, akkor a megfigyelhetővé válás után $\mathbf{P}(FI) = \mathbf{P}(F)\mathbf{P}(I)$ stb. Természetesen vannak nem független események is: például A és $\bar{A}$, ha $0 < \mathbf{P}(A), \mathbf{P}(\bar{A}) \leq 1$. (A későbbi 16.3. feladatban szereplő Markov-lánc egymást követő valószínűségi változói sem függetlenek.) A továbbiakban főleg független eseményekkel foglalkozunk.

Tegyük föl, hogy egy p siker-valószínűségű kísérletet n-szer megismétlünk. Kérdés: mennyi a valószínűsége, hogy a siker k-szor fordul elő?

16.1. tétel. *Annak a valószínűsége, hogy n független kísérletből k számú lesz a sikeres,*

$$p_{k,n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{16.1}$$

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy a siker pontosan az $i_1, \ldots, i_k$ sorszámú kísérletben fordul elő. Kombinatorikából ismert, hogy n kísérletből k-t (a sikereseket)

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}-$$

féleképp lehet kiválasztani (ezek az elemi események). A kísérletek függetlensége miatt egy adott sorozatra a k számú siker valószínűsége p^k, az $n-k$ számú kudarc valószínűsége $(1-p)^{n-k}$, tehát (16.1) teljesül. □

Figyelemre méltó, hogy (16.1)-ben éppen az n-edfokú binomiális kifejezés tagjai fordulnak elő. Ez még világosabb, ha bevezetjük a $q = 1 - p$ jelölést:

$$1 = (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}.$$

Ezért a (16.1) eloszlást *n-edrendű binomiális eloszlásnak* nevezzük. Egyébként a binomiális tétel az algebra és a kombinatorika közti szoros kapcsolat történelmileg első példája.

16.1. példa. (folytatás) $n = 2$ és $p = 1/2$ esetén (16.1)-ben 3 tag van, értékük 1/4, 1/2 és 1/4.

16.2. Várható érték és szórás

Eddig csak véletlen eseményekről beszéltünk, de érdemes bevezetni a *valószínűségi változó* fogalmát is: legyen $x_1, \ldots, x_n$ valós számsorozat, $X = x_i$ teljesül p_i valószínűséggel. Például a kockánál $x_1 = 1, \ldots, x_6 = 6$, de a fej–vagy–írásnál önkényesen kell választani a valószínűségi változót: például $x_1 = 1$ (fej), $x_2 = 0$ (írás).

Nyilvánvalóan adódik az X *várható értékének* definíciója:

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i. \tag{16.2}$$

Ez a szám a lehetséges kimenetelek valószínűségeikkel súlyozott átlaga. A fej-vagy írásnál a várható érték 0,5, a kockadobásnál a várható érték 3,5. Harmadik példa: egy tanuló különféle tantárgyi jegyeinek az átlaga.

Nyilvánvaló, hogy tetszőleges c állandóval beszorozva a valószínűségi változót, a várható érték is c-vel szorzódik: $\mathbf{E}(cX) = c\mathbf{E}X$.

Később még szükségünk lesz a következő elemi tételre, amely egy triviális, mégis hasznos felső becslést ad: legfeljebb mekkora lehet annak a valószínűsége, hogy egy pozitív értékű valószínűségi változó nagyobb, mint a várható érték 2-szerese, 3-szorosa, általában λ-szorosa? A megoldás azon alapul, hogy a „legrosszabb” esetben a változó két értéket vesz föl: a várható érték $\lambda > 1$-szeresét vagy 0-t, és ekkor a várható érték a keresett valószínűség és a pozitív érték szorzata: $\mathbf{E}X = \mathbf{P}(A)\lambda\mathbf{E}X$, tehát $\mathbf{P}(A) < 1/\lambda$.

16.2. tétel. *(Markov-egyenlőtlenség, 1890 körül.) Ha $X \geq 0$, X nem azonosan 0, és $\lambda > 1$, akkor*

$$\mathbf{P}(X > \lambda\mathbf{E}X) < \frac{1}{\lambda}. \tag{16.3}$$

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy $n > 1$, $(x_i)_{i=1}^n$ monoton növekvő sorozat, és az m index (ha létezik) választja el X-nek a $\lambda\mathbf{E}X$-nél nem nagyobb és nagyobb értékeit:

$$0 \leq x_m \leq \lambda\mathbf{E}X < x_{m+1}.$$

$x_i \leq \lambda\mathbf{E}X$ esetén X-et 0-val becsüljük alulról, egyébként $\lambda\mathbf{E}X$-szel. Behelyettesítve (16.2)-be:

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i + \sum_{i=m+1}^{n} p_i x_i > \lambda\mathbf{E}X \sum_{i=m+1}^{n} p_i = \lambda\mathbf{E}X\mathbf{P}(X > \lambda\mathbf{E}X),$$

azaz $\mathbf{E}X > 0$-val elosztva mindkét oldalt: $1 > \lambda\mathbf{P}(X > \lambda\mathbf{E}X)$. Innen adódik (16.3). □

16.2. példa. Ha kíváncsiak vagyunk arra, hogy a dolgozók hányad része keres többet, mint az átlagkereset 3-szorosa, akkor a Markov-egyenlőtlenség $\lambda = 3$-mal nagyon pontatlan választ ad: legfeljebb 1/3-a. Magyarországon 2012-ben, amikor kb. az átlagbér 3-szorosa volt a nyugdíjjárulék-alap plafonja, a tényleges plafont kb. a járulékfizetők 3%-a érte el – a becslés 1/10-e. (Javítható a becslés, ha bevezetjük a $\xi > 0$ jelölést a minimum és az átlag hányadosára: $\mathbf{P}(X > \lambda\mathbf{E}X) < (1-\xi)/(\lambda-\xi)$. Esetünkben $\xi = 0{,}5$-re $\mathbf{P}(X > 3\mathbf{E}X) < (1-0{,}5)/(3-0{,}5) = 0{,}2$.)

Az átlag mellett szükség van azonban a *szórásra* is, amely azt mutatja, hogy mennyire véletlen a változó, azaz mennyire ingadozik a várható értéke körül. Egyszerű volna a várható értéktől mért különbségek abszolút értékének a várható értékét venni (vö. 8.1. alfejezet):

$$\underset{\cdot}{X} = \sum_{i=1}^{n} p_i |x_i - \mathbf{E}X|.$$

Hamarosan látni fogjuk, hogy analitikusan azonban előnyösebb egy négyzetösszeges definíció (vö. 11.2. alfejezet):

$$\mathbf{D}X = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i |x_i - \mathbf{E}X|^2}. \tag{16.4}$$

Még jobb a szórásnégyzetet szerepeltetni (vö. a 16.4. tétel):

$$\mathbf{D}^2 X = \mathbf{E}(|X - \mathbf{E}X|^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i |x_i - \mathbf{E}X|^2. \tag{16.4$'$}$$

Nyilvánvaló, hogy tetszőleges $c > 0$ állandóval beszorozva az X valószínűségi változót, a szórás is c-vel szorzódik: $\mathbf{D}(cX) = c\mathbf{D}X$.

A következő feladat egyszerűsíti (16.4′)-t.

16.1. feladat. Igazoljuk, hogy

$$\mathbf{D}^2 X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2! \tag{16.4$''$}$$

A következő egyenlőtlenséget már korábban, a 10.4. tétel következményeként, másképp igazoltuk.

Következmény. *n szám súlyozott négyzetes közepe legalább akkora, mint súlyozott számtani közepe:*

$$\mathbf{E}X^2 \geq \sqrt{(\mathbf{E}X)^2},$$

és egyenlőség csak állandó sorozat esetén áll.

16.3. példa. Legyen X értéke siker esetén 1, kudarc esetén 0. Ekkor $\mathbf{E}X = p$ és $\mathbf{D}^2 X = p - p^2 = p(1-p)$ – ezt nevezik *Bernoulli-féle* valószínűségi változónak.

Hogyan lehet két valószínűségi változó összegét és szorzatát definiálni? Például annak idején központi kérdés volt a kockajátékosok számára, hogy miképp oszlik el két kocka együttes dobásakor az eredmények összege. X mellé bevezetünk egy másik, Y valószínűségi változót, a következő valószínűségi eloszlással: legyen $y_1, \ldots, y_m$ valós számsorozat, $Y = y_j$ áll q_j valószínűséggel. Először az együttes eloszlást definiáljuk: $r_{ij} = \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j)$ az (i, j) együttes valószínűsége. Az ún. *peremeloszlások* sor- és oszlopösszegekkel vannak meghatározva:

$$p_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n \qquad \text{és} \qquad q_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Külön megadjuk a két változó függetlenségi feltételrendszerét:

$$r_{ij} = p_i q_j, \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \text{és} \qquad j = 1, \ldots, m.$$

A kétdimenziós eloszlást és két peremeloszlását a 16.1. táblázatban szemléltetjük.

16.1. táblázat. Együttes eloszlás

Y / X	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_m	összesen
x_1	r_{11}	$\cdots$	r_{1j}	$\cdots$	r_{1m}	p_1
$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
x_i	r_{i1}	$\cdots$	r_{ij}	$\cdots$	r_{im}	p_i
$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
x_n	r_{n1}	$\cdots$	r_{nj}	$\cdots$	r_{nm}	p_n
összesen	q_1	$\cdots$	q_j	$\cdots$	q_m	1

Az $X+Y$ valószínűségi változó: $x_1+y_1, \ldots, x_i+y_j, \ldots, x_n+y_m$, és az XY valószínűségi változó pedig $x_1y_1, \ldots, x_iy_j, \ldots, x_ny_m$, mindkettő együttes (r_{ij}) valószínűségekkel.

Érdemes az n-edrendű binomiális eloszlás várható értékét és szórását kiszámítani. Nehéz volna azonban (16.1)-et behelyettesíteni (16.2)-be és (16.4′)-ba, segítségképp két általános tételt mondunk ki a konkrét számítás előtt. Az első szinte magától értetődő.

16.3. tétel. *Két valószínűségi változó összegének a várható értéke a várható értékek összege:*

$$\mathbf{E}(X+Y) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y. \tag{16.5}$$

Bizonyítás. *a)* Jelölési bonyodalmakat elkerülendő, először a legegyszerűbb esetet mutatjuk be, ahol mindkét változó 2–2 értéket vehet föl. Ekkor könnyen kiírhatjuk a (16.5) bal oldalát.

$$\mathbf{E}(X+Y) = r_{11}(x_1+y_1) + r_{12}(x_1+y_2) + r_{21}(x_2+y_1) + r_{22}(x_2+y_2).$$

Kiemelve a jobb oldalon az egyes x_i és y_j értékeket:

$$\mathbf{E}(X+Y) = (r_{11}+r_{12})x_1 + (r_{21}+r_{22})x_2 + (r_{11}+r_{21})y_1 + (r_{12}+r_{22})y_2.$$

Felhasználva a peremvalószínűségeket:

$$\mathbf{E}(X+Y) = p_1x_1 + p_2x_2 + q_1y_1 + q_2y_2 = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y.$$

b) Az általános esetben definíció szerint

$$\sum_i \sum_j r_{ij}(x_i+y_j) = \sum_i \left(\sum_j r_{ij} \right) x_i + \sum_j \left(\sum_i r_{ij} \right) y_j = \sum_i p_i x_i + \sum_j q_j y_j,$$

ahol az első egyenlőség jobb oldalán a második kettős összegben felcseréltük a sorrendet. □

Teljes indukcióval a 16.3. tétel tetszőleges tagszámú összegre kiterjeszthető.

Bonyolultabb a szórásnégyzet esete, itt egyelőre kikötjük a két eloszlás és a megfelelő véletlen változók függetlenségét.

16.4. tétel. *Két független valószínűségi változó összegének a szórásnégyzete a szórásnégyzetek összege:*

$$\mathbf{D}^2(X+Y) = \mathbf{D}^2X + \mathbf{D}^2Y. \tag{16.6}$$

Megjegyzés. Figyelemre méltó a hasonlóság a Pitagorasz-tételhez. Tekintsünk egy síkot, amelyben az X vektor végéből indul a rá merőleges Y vektor, akkor eredőjük éppen az átfogó: $X+Y$, stb. Ugyanakkor $Y = X$ esetén $\mathbf{D}^2(X+Y) = 4\mathbf{D}^2X$, míg $Y = -X$ esetén $\mathbf{D}^2(X+Y) = 0$.

Bizonyítás. Érdemes bevezetni az $\hat{X} = X - \mathbf{E}X$ és az $\hat{Y} = Y - \mathbf{E}Y$ *különbségváltozókat.* Ekkor $\mathbf{E}\hat{X} = 0$, $\mathbf{D}^2X = \mathbf{E}\hat{X}^2 = \mathbf{D}^2\hat{X}$, valamint a 16.3. tétel háromtagú általánosítása szerint

$$\mathbf{D}^2(X+Y) = \mathbf{E}(\hat{X}+\hat{Y})^2 = \mathbf{E}\hat{X}^2 + 2\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y}) + \mathbf{E}\hat{Y}^2.$$

Csak azt kell még belátnunk, hogy $\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y}) = 0$.

Itt is először a 2×2-es esetet vizsgáljuk, és csak aztán térünk rá az általános $n\times m$-es esetre.

a) Speciális eset

$$\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y}) = p_1q_1\hat{x}_1\hat{y}_1 + p_1q_2\hat{x}_1\hat{y}_2 + p_2q_1\hat{x}_2\hat{y}_1 + p_2q_2\hat{x}_2\hat{y}_2.$$

Kiemelve $p_1\hat{x}_1$-ot és $p_2\hat{x}_2$-ot, valamint felhasználva, hogy a különbségváltozók várható értéke 0,

$$\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y}) = p_1\hat{x}_1(q_1\hat{y}_1 + q_2\hat{y}_2) + p_2\hat{x}_2(\hat{q}_1\hat{y}_1 + q_2\hat{y}_2) = (p_1\hat{x}_1 + p_2\hat{x}_2)(q_1\hat{y}_1 + q_2\hat{y}_2) = 0.$$

b) Általános eset

Behelyettesítéssel és az $r_{ij} = p_i q_j$, $(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$ függetlenségi feltételrendszert használva,

$$\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i q_j \hat{x}_i \hat{y}_j = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \hat{x}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} q_j \hat{y}_j\right) = \mathbf{E}\hat{\,}X\mathbf{E}\hat{Y} = 0.$$

□

Teljes indukcióval a 16.4. tétel is tetszőleges tagszámú összegre kiterjeszthető, csak a valószínűségi változók páronkénti függetlenségét kell feltennünk.

16.4. példa. Bármilyen n-edrendű binomiális eloszlás valószínűségi változóját T_n-nel jelöljük, ez a sikerek számát adja meg.

16.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az n-edrendű binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke np, szórásnégyzete $np(1-p)$!

Következik egy fontos egyenlőtlenség, amely egy tetszőleges valószínűségi változó várható értékétől való eltérési valószínűségét becsli felülről a szórás segítségével.

16.5. tétel. *(Csebisev-egyenlőtlenség, 1867.) Legyen az X valószínűségi változó várható értéke μ és szórása $\sigma > 0$. Ekkor $\varepsilon > \sigma$ esetén*

$$\mathbf{P}(|X - \mu| > \varepsilon) < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Markov-egyenlőtlenséget (16.2. tételt) az $Y = |X-\mu|^2 > 0$ valószínűségi változóra. Definíció szerint $\mathbf{E}Y = \sigma^2$, $\varepsilon^2 = \lambda\sigma^2$. □

Megjegyzések. 1. Csebisevről több fontos egyenlőtlenséget is elneveztek; ez a valószínűség-számítási egyenlőtlenség, a 10.5. tétel viszont az összegegyenlőtlenség.

2. Az időpontokból nyilvánvaló, hogy Csebisev előbb alkalmazta a Markov-egyenlőtlenséget, mint ahogy Markov kimondta volna.

16.5. példa. Egy egyenlőtlenséget *élesnek* nevezünk, ha esetenként egyenlőségre teljesül, pl. a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség. Figyelemre méltó, hogy a szimmetrikus pénzfeldobásnál a Csebisev-egyenlőtlenség bizonyos esetben éles: $p = 1/2$, $(\sigma = 1/2)$, $\varepsilon = 1/2$ esetén

$$\mathbf{P}(|X - 1/2| \geq 1/2) = 1.$$

16.3. A nagy számok törvényei

Ebben az alfejezetben bebizonyítjuk az ún. *nagy számok gyenge törvényét.* Legyen $X_1, \dots, X_n$ n darab páronként független és azonos eloszlású valószínűségi változó, amelyeknek létezik közös várható értéke: μ és közös szórása: $\sigma > 0$. Képezzük a számtani közepüket:

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}. \tag{16.7}$$

A 16.3. tétel és a linearitás miatt $\mathbf{E}S_n = \mu$.

Heurisztikusan a nagy számok törvényei azt mondják ki, hogy páronként (vagy teljesen) független valószínűségi változókra sok ismétlés után a számtani közép sztochasztikusan a közös várható értékhez tart. (De ennek igazához alkalmas korlátossági feltétel kell, például véges szórás.) A gyenge törvény csak az eltérés valószínűségét korlátozza, az itt nem taglalt erős törvény viszont majdnem minden elemi eseményre is igazolja a konvergenciát. A gyenge törvény megengedi, hogy minden n-re más és más halmazon legyen nagyobb ε-nál az eltérés, az erős törvény ezt egyre kisebb kivételes halmazokra korlátozza. (Legegyszerűbb esetben ez utóbbi törvény azt az evidens állítást mondja ki, hogy a $[0, 1]$ szakasz pontjait 2-es számrendszerben felírva, majdnem minden szám kifejtésében a 0-k és az 1-esek részaránya azonos: 1/2–1/2. Meglepő lenne, ha például a „túl sok” számra a relatív gyakoriság nem tartana egy határértékhez. Ha van határérték, akkor szimmetria miatt 0,5.)

Formálisan

16.6. tétel. *(Csebisev tétele, 1867, a nagy számok gyenge törvénye.) Annak valószínűsége, hogy a (16.7)-ben definiált számtani középnek a közös várható értéktől abszolút értékben vett eltérése nagyobb, mint egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám, n-nel fordítottan arányos felső korláttal becsülhető:*

$$\mathbf{P}(|S_n - \mu| > \varepsilon) < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}. \tag{16.8}$$

Megjegyzés. A tételt először a legegyszerűbb alakban Jakob Bernoulli bizonyította be (posztumusz publikáció: 1713).

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Csebisev-egyenlőtlenséget (16.5. tételt) a $Z_n = S_n/n > 0$ valószínűségi változóra. A 16.3. és 16.4. tétel értelmében $\mathbf{E}Z_n = \mu$ és $\mathbf{D}^2 Z_n = \sigma^2/n$. $\square$

Megjegyzések. 1. Statisztikai alkalmazásokban a tételt megfordítva alkalmazzuk: ha meg akarjuk vizsgálni, hogy a siker valószínűsége tényleg p, akkor naiv módon éppen az ismételt dobások átlagát vesszük. Például ha 100 dobásból 30 db fej, akkor $p = 0{,}3$ becsléssel élünk.

2. Egyébként bonyolultabb eszközökkel sokkal pontosabb becslést is kaphatunk (16.8) jobb oldalára, de ezt az eshetőséget csak jelezzük a 16.7. példa végén.

16.6. példa. A gyakorlatban gyakran élünk az $\varepsilon = \sigma$ választással. Ekkor

$$\mathbf{P}(|S_n - \mu| > \sigma) < \frac{1}{n}. \tag{16.8$'$}$$

16.7. példa. Legyen $X = 1$ a fej, $X = 0$ az írás, azaz $p = 1/2$, $\mu = 1/2$, $\sigma = 1/2$, tehát $\varepsilon = 0{,}05$ esetén 10 000 dobásnál $\mathbf{P}(|S_{10000} - 0{,}5| > 0{,}05) < 1/100 = 0{,}01$ – elég elbátortalanító becslés. Ügyesebb számolással már $n = 1\,283$ kísérletre is igazolható a kis hiba.

16.8. példa. Ha $n = 3$-szoros fej-vagy-írást vizsgáljuk, akkor a négy valószínűség rendre

$$p_{0,3} = \frac{1}{8} = 0{,}125; \quad p_{1,3} = \frac{3}{8} = 0{,}375 \quad p_{2,3} = \frac{3}{8} = 0{,}375; \quad p_{3,3} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Mivel S_3 lehetséges értékei 0, 1/3, 2/3 és 1, válasszuk (16.8′) szerint a minimális eltérést, $\varepsilon = 1/2 - 1/3 = 1/6$, s ez esetben $\mathbf{P}(|S_3 - 1/2| > 1/6) = 0{,}25$; holott (16.8) jobb oldala értelmetlenül nagy: $(1/2)^2/[(1/6)^2 \cdot 3] = 3$.

A következő feladat a nem független valószínűségi változók viselkedésére vonatkozik, de speciális megfogalmazása miatt középiskolás keretek között is vizsgálható (vö. 4.3. alfejezet).

16.3. feladat. Tekintsünk egy 2-állapotú Markov-láncot, ahol a rendszer a t-edik időszakban rendre p_t és q_t valószínűséggel van az 1., illetve a 2. állapotban, $p_t + q_t = 1$. Adott α és β átmenet-valószínűségek esetén az állapotvalószínűségek a következő szabály szerint változnak ($0 < \alpha, \beta < 1$):

$$p_{t+1} = \alpha p_t + (1-\beta)q_t \qquad \text{és} \qquad q_{t+1} = (1-\alpha)p_t + \beta q_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Például egy fizikai rendszer minden időszakban két állapotban lehet: 1 és 2, és az adott állapot valószínűsége csak az előző időszak állapotától függ. (Ha $\alpha + \beta = 1$, akkor a rendszer állapotvalószínűsége minden időszakban α, illetve β.)

a) Határozzuk meg a rendszer $(p^{\mathrm{o}}, q^{\mathrm{o}})$ stacionárius állapotvalószínűség-párját, azaz ahol az állapotvalószínűségek időben állandóak!

b) Igazoljuk, hogy akármilyen $p_0 \geq 0$ és $q_0 = 1 - p_0 \geq 0$ kezdőállapotból indítva a rendszert, (p_t, q_t) tart $(p^{\mathrm{o}}, q^{\mathrm{o}})$-hoz, azaz hosszú távon a rendszer rendre p^{o} és q^{o} valószínűséggel van az 1. és a 2. állapotban!

17. A biztosítás és a szerencsejátékok alapmodelljei

A 17. fejezet a biztosítás és a szerencsejátékok alapmodelljeit mutatja be. A biztosítás lényege: a biztosítótársaság sok nagyjából egyforma és egymástól független káreseményt biztosít ügyfelei számára – biztosítási díj ellenében kárpótolja a károsultakat. Mivel az összkár relatív szórása (szórás/kár, ahol a szórás a véletlen változó ingadozásának (16.4)-ben definiált értéke) nagyon kicsiny, ezért az elegendő tőkével és jól működő hálózattal rendelkező biztosító viszonylag kis felárral fedezi a kárt. Közgazdasági szempontból különlegesen érdekes eset, ha a kár valószínűségét növeli a biztosítás megléte: ez a *morális kockázat*, ekkor célszerű önrészesedéssel csökkenteni a kár valószínűségét. Ha a kis- és a nagykockázatúak előre nem különböztethetők meg egymástól, akkor átlagos díjszabás esetén gyakran csak a nagykockázatúaknak érné meg a biztosítás megkötése, ez a *kontraszelekció*. Viszont megfelelő önrészesedés bevezetésével a kisebb kockázatúak megkülönböztethetik magukat a nagyobb kockázatúaktól.

A biztosítás három alapmodelljét mutatjuk be: a 17.1. alfejezetben a klasszikust, a 17.2. alfejezetben a morális kockázatét és a 17.3. alfejezetben a kontraszelekcióét. A 17.4. alfejezetben kitérünk a biztosítás tükörképére, a szerencsejátékokra, ahol a részvevők nem csökkenteni, hanem növelni akarják a kockázatokat.

17.1. Klasszikus biztosítási modell

A klasszikus biztosítási alapmodell a következő. Van n (nagy)számú egyén, akiket egymástól függetlenül, azonos p valószínűséggel érhet *kár,* amelynek értéke $d > 0$. Egy biztosító $e = pd(1 + \pi)$ *díjért* hajlandó az egyéni kárt biztosítani, ahol $\pi > 0$ a biztosító bruttó (költségeit is tartalmazó) haszonkulcsa (profitráta) biztosítottanként. A kérdés: milyen további feltételek mellett éri meg az egyéneknek, illetve a biztosítónak biztosítást kötni?

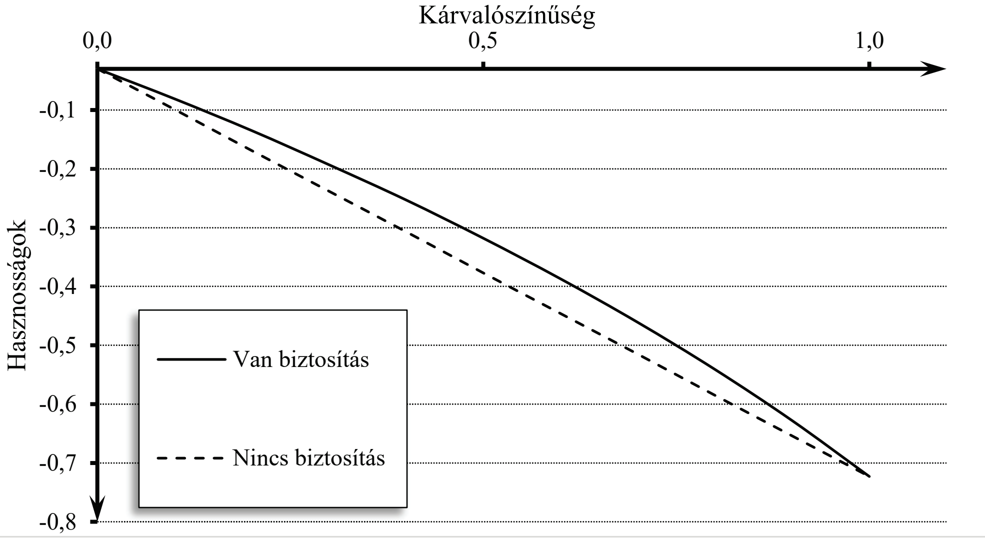
Tegyük föl, hogy az egyén vagyona 1 egység, amely nagyságrendben összemérhető a kárértékkel. Például hősünknek volt 6 mFt megtakarított pénze, s ebből vett egy 5 mFt értékű autót. A kötelező biztosítás mellett autóját még biztosítja az önmagának okozott kár és a lopás ellen is. Első látásra nem érdemes Casco-biztosítást kötnie, hiszen a várható kár kisebb, mint a biztosan kifizetett díj: $pd < pd(1 + \pi)$.

Ahhoz, hogy biztosítás megkötése mellett döntsünk, a várható hasznosságot kell mérlegelnünk. Legyen $u(\cdot)$ egy megfelelő szakaszon értelmezett, szigorúan növekvő és szigorúan konkáv skalárértékű függvény, amely megadja, hogy szubjektíve mennyit ér az egyénnek, hogy ha kár esetén van vagy nincs autóbiztosítása. Bal oldalra írjuk a biztosítási díjjal csökkentett, de biztosított értékű vagyont. Jobb oldalon a *várható hasznosság* két tagja szerepel: $p \in (0, 1)$ valószínűséggel a biztosítatlan autó tulajdonosának a kár bekövetkezése esetén tapasztalt hasznossága, és $q = 1 - p$ valószínűséggel a szerencsés kimenetel hasznossága. (Ekkor utólag visszatekintve felesleges lett volna a biztosítás, mert nem volt káreset.) A kérdés az, hogy mikor lesz a bal oldal nagyobb, mint a jobb:

$$u(1 - e) > pu(1 - d) + qu(1).$$

A 17.1. ábra $u(x) = \log x$, $p = 1/2$, $d = 1/2$, azaz $e = pd = 1/4$ esetét mutatja be.

17.1. ábra. Biztosítás hasznossága



Figyelem: $0 < p < 1$, mert soha ($p = 0$) vagy biztosan ($p = 1$) bekövetkező káreseményeket nem érdemes biztosítani. Az egyszerűség kedvéért egyelőre eltekintünk a biztosítási haszontól (profittól): $\pi = 0$ esetén $e_0 = pd$, ekkor kimondhatjuk a következő tételt.

17.1. tétel. *Ha az egyén hasznosságfüggvénye szigorúan növekvő és szigorúan konkáv, és a biztosítási díj csak a várható kárt fedezi (nincs biztosítói haszon (másképp: profit): $\pi = 0$), akkor teljesül*

$$u(1 - pd) > pu(1 - d) + qu(1),$$

azaz érdemes biztosítást kötni.

Bizonyítás. A szigorú konkavitás definíciója szerint tetszőleges $p, q = 1 - p > 0$ és $x \neq y$ számokra $u(px + qy) > pu(x) + qu(y)$. Nyilvánvaló választás: $x = 1 - d$ és $y = 1$, akkor $px + qy = p(1 - d) + q = 1 - pd$. □

17.1. feladat. Ha biztos a kár, akkor tényleg nem érdemes biztosítást kötni? Miért nem érdemes biztosítást kötni, ha lineáris a hasznosságfüggvény?

Felvetődik a kérdés: miért képes a biztosító viszonylag kis haszonnal biztosítást nyújtani? Mert a 16.6. (Csebisev-)tétel értelmében, ha sok olyan egyén köt biztosítást, akiket fenyegető kár egyforma és független, akkor az egy biztosítottra jutó kifizetés relatív szórása nagyon kicsiny, a biztosító kockázata elhanyagolható.

17.2. feladat. Miért nem érdemes az államnak biztosítást kötnie vagyontárgyaira?

Elvben meghatározható azt a π^o biztosítói haszonkulcs, amely mellett az egyénnek közömbös, hogy köt-e vagy sem biztosítást:

$$u(1 - pd(1 + \pi^o)) = pu(1 - d) + qu(1). \tag{17.1}$$

17.1. példa. Az $u(x) = \log x$ hasznosságfüggvény esetén szemléltetjük a haszon, illetve -kulcs paraméterérték-függését a kárvalószínűségtől és a kártól. Ekkor bevezetve a $h = \pi pd$ biztosítói hasznot, (17.1) egyszerűsödik:

$$\log(1 - pd - h) = p \log(1 - d). \tag{17.2}$$

(17.2)-ből ki lehet fejezni h-t:

$$1 - pd - h = (1-d)^p, \qquad \text{azaz} \qquad h = 1 - pd - (1-d)^p.$$

Számpélda: p és d 0,2; 0,4 és 0,6 értéket veszi föl: $3 \times 3 = 9$ eset. A 17.1. táblázat szerint a maximális biztosítói haszon kis relatív kár (0,2) és kis kárvalószínűség (0,2) mellett csupán csak 0,004 vagyonrész, míg nagy relatív kár (0,6) és nagy kárvalószínűség (0,6) mellett 0,063; a haszonkulcs kis relatív kár (0,2) és nagy kárvalószínűség (0,6) mellett csupán csak 4,4%, míg nagy relatív kár (0,6) és kis kárvalószínűség (0,2) mellett 39,5%.

17.1. táblázat. A maximális biztosítói haszon (h) és haszonkulcs (π)

	Kárvalószínűségek (p)					
Kár (d)	haszon (h)			haszonkulcs (π)		
	0,2	0,4	0,6	0,2	0,4	0,6
0,2	0,004	0,005	0,005	0,091	0,067	0,044
0,4	0,017	0,025	0,024	0,214	0,155	0,100
0,6	0,047	0,067	0,063	0,395	0,279	0,175

Ezen a ponton kitérünk a Bevezetésben említett Lucas-féle anticiklikus jövedelemkiegyenlítésre. Tegyük föl, hogy a reprezentatív dolgozó keresete 1/2–1/2 valószínűséggel w_1 és w_2, $0 < w_1 < w_2$, és lehetőség lenne teljes jövedelemkiegyenlítésre: $v = (w_2 - w_1)/2 > 0$ kiegészítő jövedelmet kap a vesztes, és ugyanannyit fizet a nyertes: marad $w = (w_2 + w_1)/2$. Elméleti kérdés: milyen $s > 0$ biztosítási felárat hajlandó fizetni a dolgozó ezért a szolgáltatásért? Most az eddigi $u(x) = \log x$ additív hasznosságfüggvény helyett egy nem additív és eltolt kezdőpontú hatványközéppel dolgozunk:

$$U(w_1, w_2) = \left[\frac{(w_1 - w_0)^r + (w_2 - w_0)^r}{2}\right]^{1/r}, \qquad r < 0.$$

Kitérő: minél nagyobb az r kitevő abszolút értéke, annál konkávabb a függvény, és annál nehezebben viseli el a fogyasztó a jövedelemingadozást. Határértékben ($r \to -\infty$): $U(w_1, w_2) = \min(w_1, w_2) - w_0$ (Leontief-féle hasznosságfüggvény). Ekkor a jövedelemkiegyenlítés közömbösségi feltétele

$$w - \gamma - w_0 = U(w_1, w_2), \qquad \text{azaz} \qquad \gamma = w - w_0 - U(w_1, w_2).$$

Egyszerű számítással adódik a kiegyenlítési díj függése a 0-hasznosságponttól és a hasznossági függvény kitevőjétől. Két kereset: $w_2 = 1{,}05$ és $w_1 = 0{,}95$. A két paraméter a következő értékeket veszi föl: $w_0 = 0, \ldots, 0{,}8$; $r = -1, -2, -3, -4 \ldots$. A bal felső sarokban ($w_0 = 0$ és $r = -1$) még valóban 2 ezrelékes díj szerepel, de a jobb alsó sarokban a reálisabb ($w_0 = 0{,}8$ és $r = -4$) 2,7%!

17.2. táblázat. Kiegyenlítési díj változása $h(r, w_0)$

Hasznosságpont w_0 Kitevő r	0	0,2	0,4	0,6	0,8
–1	0,002	0,003	0,004	0,006	0,012
–2	0,004	0,005	0,006	0,009	0,018
–3	0,005	0,006	0,008	0,012	0,023
–4	0,006	0,008	0,010	0,015	0,027

Általánosítjuk a klasszikus feladatot arra az esetre, amikor az egyén *részleges* biztosítást is köthet. Legyen az *önrészesedés* értéke s, $0 \le s \le d$, a biztosító $e(s) = p \cdot (d-s)(1+\pi)$ díjért hajlandó a kár önrészesedés fölötti részét biztosítani, ahol $\pi > 0$ a biztosító bruttó haszonkulcsa. (Természetesen $s = 0$-nél nincs önrészesedés, $s = d$-nél pedig nincs biztosítás.)

Ismét elhanyagolva a biztosító haszonkulcsát, visszatérünk az önrészesedésen alapuló biztosítás (bal oldal) és az ennél hátrányosabb, biztosítás nélküli eset (jobb oldal) várható hasznosságához: $U(s) > U(d)$, azaz

$$pu(1-e(s)-s) + qu(1-e(s)) > pu(1-d) + qu(1), \qquad e(s) = p \cdot (d-s). \tag{17.3}$$

Igaz a 17.1. tétel általánosítása.

17.2. tétel. *Ha az egyén hasznosságfüggvénye szigorúan növekvő, szigorúan konkáv, és a részleges biztosítási díj csak a várható kártérítést fedezi (nincs biztosítói haszon), akkor az egyénnek érdemes teljes biztosítást kötnie:* $s^{\circ} = 0$.

Mi az értelme akkor az önrészesedésnek? Sok.

17.2. Morális kockázat a biztosításban

A kármegelőzés elhanyagolása miatt a biztosítás megléte növeli a kár veszélyét: ezt hívják *morális kockázatnak.* Feltehető, hogy minél kisebb az önrészesedés, annál nagyobb a kár valószínűsége: $p(s)$ csökkenő függvény a $0 \le s \le d$ szakaszon. Ekkor (17.3) bal oldalát módosítanunk kell:

$$U(s) = p(s)u(1-e(s)-s) + [1-p(s)]u(1-e(s)). \tag{17.4}$$

Az elméleti levezetéshez ismét a kalkulushoz kell folyamodnunk, de a beavatatlan Olvasó nyugodtan átugorhatja a következő tételt, és áttérhet a számpéldára. De az is elég, ha az Olvasó elfogadja, hogy $U'(s)$ az U hasznosságfüggvény érintőjének a meredeksége az s pontban. A 3.3.* tétel speciális eseteként igaz a

17.3.* tétel. *A 17.2. tétel feltevéseit a morális kockázat figyelembevételével általánosítva, az optimális s° önrészesedésre három eset lehetséges: a) vagy részleges biztosítás:*

$$0 < s^{\circ} < d, \quad ha \quad U'(s^{\circ}) = 0; \tag{17.5a}$$

b) vagy nincs biztosítás:

$$s^{\circ} = d, \quad ha \quad U'(d) \ge 0; \tag{17.5b}$$

c) vagy teljes a biztosítás:

$$s^{\circ} = 0, \quad ha \quad U'(0) \le 0. \tag{17.5c}$$

Számpéldánk folytatja a 17.1. táblázatot, de kikapcsolja a haszonkulcsot: $\pi = 0$. A kulcskérdés: hogyan függ a morális kockázat az önrészesedéstől? A $p(s) = p_0 + \rho(d-s)$ függvény paraméterértékeit kísérletezéssel állapítjuk meg.

Mielőtt bemutatnánk, hogyan változik a biztosított jóléte az önrészesedés emelésével, felhívjuk az Olvasó figyelmét arra, hogy maguknak a hasznossági értékeknek nincs közgazdasági értelme (vö. 17.1. ábra). Helyesebb olyan mértékegységben kifejezni őket, amelyeknek van. Érdemes a biztosítás nélküli ($s = d$) esetet választani alapnak. A többi kimenet értékét egy olyan $\varepsilon > 0$ számmal jellemezzük, amellyel az alapesetben beszorozva mind a vagyon, mind a kár értékét, annak hasznossága megegyezne a részleges biztosításéval – az eredeti vagyon és kár esetén. Képletben:

$$U[\varepsilon, s] = p(s)u(\varepsilon[1 - e(s) - s]) + [1 - p(s)]u(\varepsilon[1 - e(s)]). \tag{17.4'}$$

Az s nagyságú önrészesedés ε *relatív hatékonysága* tehát az

$$U[\varepsilon, d] = U[1, s] \tag{17.6}$$

egyenlet gyöke. Újból logaritmikus hasznosságfüggvényt tételezünk föl, s ekkor $U[\varepsilon, d] = U[1, d] + \log \varepsilon$, ezért (17.6)-ból

$$U[1, d] + \log \varepsilon = U[1, s], \qquad \text{azaz} \qquad \varepsilon = \exp(U[1, s] - U(1, d]).$$

A 17.3. táblázatban rögzítjük a feltételezett $p(s) = p_0 + \rho(d - s)$ kárvalószínűség–önrészesedés-függvényben szereplő $p_0 = 0{,}2$-et és $d = 0{,}6$-et, és a három morális kockázattal kísérletezünk: $\rho_1 = 0$ (gyenge), $\rho_2 = 0{,}1$ (közepes) és $\rho_3 = 0{,}2$ (erős), és 0,1-es lépésközzel vizsgáljuk az önrészesedés hatását. A megfelelő közelítő optimális önrészesedés rendre $s_1^{\mathrm{o}} = 0$, $s_1^{\mathrm{o}} = 0{,}2$ és $s_1^{\mathrm{o}} = 0{,}6$. Az optimális relatív hatékonyságok rendre 1,069; 1,032 és 1, mindhárom dőltve.

17.3. táblázat. Relatív hatékonyság, morális kockázat és önrészesedés

	Gyenge	Közepes	Erős
Önrészesedés	morális kockázat		
s	ε_1	ε_2	ε_3
0,0	*1,069*	1,024	0,978
0,1	1,067	1,029	0,992
0,2	1,063	*1,032*	1,001
0,3	1,055	1,031	1,007
0,4	1,042	1,025	1,009
0,5	1,024	1,016	1,007
0,6	1,000	1,000	*1,000*

17.3. Kontraszelekció a biztosításban

Ebben az alfejezetben olyan esetet vizsgálunk, amelyben két ügyféltípus létezik: a kis- és a nagykockázatú típus: $0 < p_L < p_H < 1$, súlyuk a népességben $f_L, f_H > 0$, $f_L + f_H = 1$. (Most eltekintünk a morális kockázattól.) Először megnézzük, hogy mi történik, ha a biztosító képtelen vagy nem akarja a biztosításnál megkülönböztetni a két típust, és közös biztosítási díjat ajánl, amely átlagosan fedezi a teljes biztosítás költségét:

$$e_0 = (f_L p_L + f_H p_H)d. \tag{17.7}$$

Például a tb-egészségügyi biztosításnál nem vizsgálják meg, hogy eredetileg beteg volt-e az illető vagy sem (14.2. alfejezet), vagy férfi-e vagy nő.

17.4. tétel. *Két típus önkéntes és közös biztosításánál a kockázatosabb típusnak mindig érdemes biztosítást kötnie, de a kisebb kockázatú típusnak csak akkor, ha teljesül*

$$p_{\mathrm{L}} u(1-d) + q_{\mathrm{L}} u(1) \le u(1-e_0). \tag{17.8}$$

Ekkor az L-típus keresztfinanszírozza a H-típust, a túlfizetés: $z = e_0 - p_{\mathrm{L}} d$.

Megjegyzések. 1. (17.7) miatt a keresztfinanszírozás nagysága arányos a H-típus súlyával, a kockázatkülönbséggel és a kárral:

$$z = (f_{\mathrm{L}} p_{\mathrm{L}} + f_{\mathrm{H}} p_{\mathrm{H}})d - p_{\mathrm{L}} d = f_{\mathrm{H}}(p_{\mathrm{H}} - p_{\mathrm{L}})d > 0.$$

2. Ha (17.8) nem teljesül, akkor csak a kockázatosabb típus köt biztosítást, és (17.7) helyére nagyobb díj lép: $e_{\mathrm{H}} = p_{\mathrm{H}} d > e_0$. Ilyenkor *kontraszelekcióról* (vagy antiszelekcióról) beszélünk.

Ha a biztosító jól választja meg az önrészesedés nagyságát, akkor a kontraszelekciót is kiszűrheti. Ha az egyének becsületesek lennének, akkor kétféle teljes biztosítást lehetne kötni: $e_{\mathrm{L}} = p_{\mathrm{L}} d$ és $e_{\mathrm{H}} = p_{\mathrm{H}} d$ díjjal – ez lenne az ún. *első legjobb megoldás*. De a becsületességet általában nem lehet feltenni, viszont a kiskockázatú típus nagy önrészesedéssel jelezheti a biztosítónak, hogy ő valóban kiskockázatú: $e_{\mathrm{L}}(s) = p_{\mathrm{L}} \cdot (d-s)$. A nagykockázatú típusnak viszont nem éri meg, hogy a nagyobb önrészesedéssel vállalja a hazugságot, hogy kiskockázatú: marad $e_{\mathrm{H}} = p_{\mathrm{H}} d$. Képletben a két *érdekeltségi feltétel*:

• A kiskockázatúnak legalább annyira megéri az s önrészesedés vállalása, mint a kockázatosabb típusra méretezett teljes biztosításé:

$$U_{\mathrm{L}}(s) = p_{\mathrm{L}} u(1 - e_{\mathrm{L}}(s) - s) + q_{\mathrm{L}} u(1 - e_{\mathrm{L}}(s)) \ge u(1 - p_{\mathrm{H}} d) = U_{\mathrm{H}}(0). \tag{17.9L}$$

• A nagykockázatúnak (H) még csalás árán (L-nek tetteti magát) sem igazán éri meg az s önrészesedés vállalása:

$$U_{\mathrm{L|H}}(s) = p_{\mathrm{H}} u(1 - e_{\mathrm{L}}(s) - s) + q_{\mathrm{H}} u(1 - e_{\mathrm{L}}(s)) \le U_{\mathrm{H}}(0), \tag{17.9H}$$

ahol $U_{\mathrm{L|H}}$ az L-ként szerződő H-típus hasznossága. Emellett természetesen mindkét szereplő jobban jár, mint ha semmilyen biztosítást sem kötne:

$$U_{\mathrm{L}}(s) > U_{\mathrm{L}}(d) \qquad \text{és} \qquad U_{\mathrm{H}}(0) > U_{\mathrm{H}}(d). \tag{17.10}$$

A következő tételben megadjuk a *második legjobb* megoldást.

17.5. tétel. *A második legjobb megoldásban a kiskockázatú típus önrészesedése egy olyan* $0 < s^* < d$ *szám, amelyre egyenlőséggel teljesül (17.9H):*

$$U_{\mathrm{L|H}}(s^*) = U_{\mathrm{H}}(0), \tag{17.11}$$

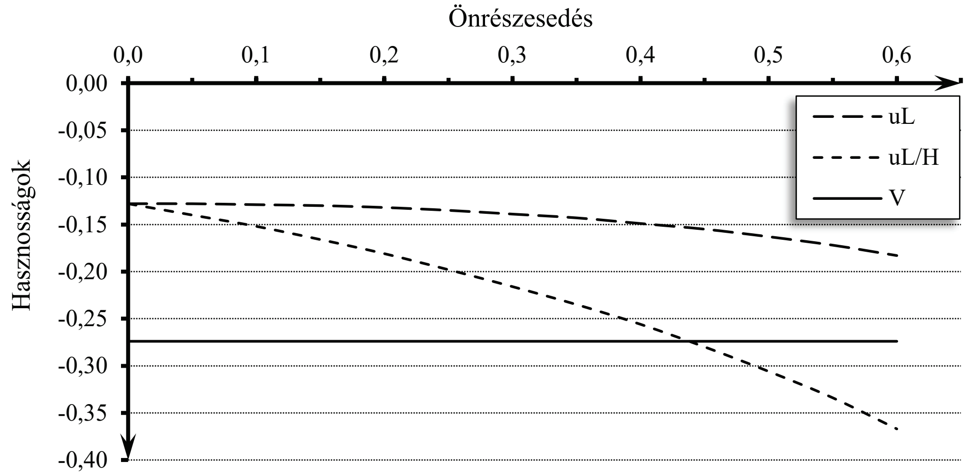
a nagykockázatú típusnak pedig marad a drága, de teljes biztosítás.

Ismét logaritmikus hasznosságfüggvényen szemléltetjük a rendszert: $u(x) = \log x$. Ekkor (17.11) analitikusan kezelhetővé válik:

$$p_{\mathrm{L}} \log(1 - p_{\mathrm{L}} d - q_{\mathrm{L}} s^*) + q_{\mathrm{L}} \log(1 - p_{\mathrm{L}} d + p_{\mathrm{L}} s^*)) = \log(1 - p_{\mathrm{H}} d).$$

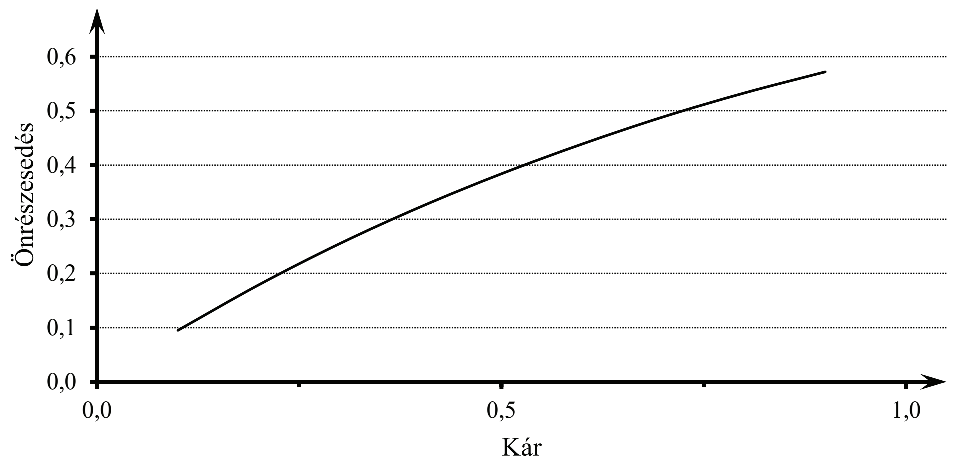
A 17.2. ábrán bemutatjuk a második legjobb megoldáshoz vezető érdekeltségi feltételeket a $p_{\mathrm{L}} = 0,2$ és $p_{\mathrm{H}} = 0,4$ kockázatpár esetén.

17.2. ábra. Érdekeltségi feltétel



A 17.3. ábrán bemutatjuk a numerikus módszerekkel meghatározott második legjobb megoldást a $p_{\mathrm{L}} = 0{,}2$ és $p_{\mathrm{H}} = 0{,}4$ kockázatpár esetén, amint a d kár/vagyon hányados növekszik. Például 10%-os relatív kárnál csak a vagyon 9,5%-át kitevő önrészesedést érdemes vállalni, míg 90%-osnál már 57,2%-ot. Persze magához a (relatív) kárhoz mérve az önrészesedést, fordított képet kapunk: a legkisebb kárnál szinte semmit sem érdemes biztosítani, de a legnagyobb kárnál már majdnem a kár 1/3-át.

17.3. ábra. Kár és optimális önrészesedés



17.3. feladat. Készítsünk egy programot, amely meghatározza az optimális önrészesedést, ha a kár/vagyon arány rögzített: $d = 0{,}5$; valamint a kis és a nagy kockázat 0,2 és 0,6 között változik 0,1-es lépésközzel!

Az alfejezet végére érve, megemlítjük, hogy a modellek nemcsak a szűken vett biztosításra, hanem az ösztönzési feladatok széles körére alkalmazhatók. Például a jobbágy és a földesúr közti szerződés hatékonyabb, mint a rabszolga és gazdája közti, de kevésbé hatékony, mint a bérlő és a tulajdonos közti. (A rabszolga alig érdekelt a munkája eredményében, a jobbágy némileg érdekelt, végül a bérlő viszont maximálisan.)

17.4. Szerencsejátékok

Ebben a fejezetben eddig föltettük, hogy a részvevők zöme csökkenteni akarja a kockázatát – biztosítást köt. Most rátérünk a probléma tükörképére, a *szerencsejátékokra*, amelyekben kockázatkedvelő játékosok vesznek részt, hasznosságfüggvényük tehát nem konkáv, hanem konvex. Félreértést elkerülendő, nem érzem a közgazdaságtanra tartozónak a mértéktelen és az egyénen elhatalmasodó kockázatvállalást, ezért ezzel nem foglalkozom. Először az alapmodellt mutatjuk be, majd néhány hazai adatot ismertetünk.

Alapmodell

A szerencsejátékok legegyszerűbb modelljével már a 3.3. példában foglalkoztunk. Két játékos egymás ellen (kis tételben) nullaösszegű játékot játszik, amelyben egy kevert stratégia adja az egyensúlyt. Most egy bonyolultabb, de sokkal fontosabb helyzetet modellezünk. Van egy tulajdonos, aki olyan nagy tőkével működteti a „kaszinót”, hogy nem kell a kockázattal számolnia: kockázatsemleges. És vannak a szerencsejátékosok, akik c költség fejében b nyereséghez szeretnének jutni. Legyen $p \in (0,1)$ a nyerés valószínűsége, és $q = 1 - p$ a vesztésé. A tulajdonos csak akkor működteti a kaszinót, ha a játékosok várható nyereménye kisebb, mint a részvételi díj: $pb = c_{\mathrm{m}} < c$.

Ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy szubjektíve mikor éri meg egy adott játékosnak a részvétel, ismernünk kell a játékos w kezdeti vagyonát és $u(\cdot)$ hasznosságfüggvényét. Valóban, a játékosnak akkor éri meg a részvétel, ha emiatt a várható hasznosság növekszik:

$$pu(w - c + b) + qu(w - c) > u(w), \qquad 0 < c < w. \tag{17.12}$$

Érdemes definiálni a *maximális részvételi díjat*, amelynél a játékosnak közömbös, hogy részt vesz-e a játékban vagy sem:

$$pu(w - c_{\mathrm{M}} + b) + qu(w - c_{\mathrm{M}}) = u(w). \tag{17.13}$$

Igaz a

17.6. tétel. *Konvex hasznosságfüggvényű játékos és kockázatsemleges kaszinó akkor talál egymásra, ha a részvételi díj a minimális és a maximális díj között van:*

$$c_{\mathrm{m}} < c < c_{\mathrm{M}}.$$

Bizonyítás. A hasznosságfüggvény monotonitása miatt pontosan egy maximális díj létezik. Nyilvánvaló, hogy a játékos pontosan akkor vesz részt a játékban, ha a díj kisebb, mint a maximális érték: $c < c_{\mathrm{M}}$. A Jensen-egyenlőtlenség miatt a maximális díj nagyobb, mint a minimális díj: $c_{\mathrm{M}} > c_{\mathrm{m}}$. □

17.2. példa. Az $u(x) = x^2$ függvény esetén a maximális részvételi díj explicite meghatározható. Valóban, (17.13) szerint

$$p(w + b - c)^2 + q(w - c)^2 = w^2. \tag{17.14}$$

Kifejtve (17.14)-et:

$$pw^2 + 2pwb + pb^2 - 2p(w + b)c + pc^2 + qw^2 - 2qwc + qc^2 = w^2,$$

azaz

$$c^2 - 2(w + pb)c + 2pwb + pb^2 = 0, \tag{17.15}$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete szerint (a negatív előjelű diszkriminánst véve) a megfelelő gyök

$$c_{\mathrm{M}} = w + pb - \sqrt{w^2 - p(1-p)b^2}. \tag{17.16}$$

A gyakorlatban sokszor hasznos egyszerű közelítő képleteket használni. Erre ad lehetőséget a (17.16) képlet, ha a nyeremény nagyságrendileg kisebb, mint a vagyon: $b \ll w$. De a közelítés csődöt mond, ha b és w azonos nagyságrendű. A következő közelítés alkalmazzuk (vö. 6.1. segédtétel):

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \qquad x \approx 0. \tag{17.17}$$

Valóban, emeljük négyzetre a bizonyítandó (17.17) mindkét oldalát:

$$1 + x \approx 1 + x + \frac{x^2}{4},$$

s ez utóbbi reláció valóban jó közelítés. Például $\sqrt{1+0{,}21} \approx 1{,}105$; a pontos érték 1,1.

Alkalmazzuk a (17.17)-et (17.16) közelítésére!

$$\sqrt{w^2 - p(1-p)b^2} \approx w\left[1 + \frac{\sigma}{2}\frac{b}{w}\right],$$

ahol $\sigma^2 = p(1-p)$ jelöli a Bernoulli-eloszlás szórásnégyzetét. Innen következik a

17.7. tétel. *Kvadratikus hasznosságfüggvénynél a maximális díj alsó becslése*

$$\tilde{c}_{\mathrm{M}} = c_{\mathrm{m}} + \frac{\sigma b}{2w}. \tag{17.16$'$}$$

Szóban: a maximális részvételi díj *közelítőleg* egyenlő – de valójában nagyobb, mint – a minimális díj plusz a húzás szórása és a relatív nyeremény félszorzata. (Más hasznosságfüggvény esetén a felár más.)

A 17.4. táblázatban bemutatjuk a (három tizedesjegyig) pontos és a közelítő maximális részvételi díj függését a nyeremény/vagyon értékétől. Az első három sorban a felárat a tizedesvessző utáni törtrész mutatja, de az utolsó részben már 46 egésszel kezdődik a felár. Látható, hogyan romlik el fokozatosan a közelítés.

17.4. táblázat. Nyeremény és a maximális részvételi díj

Nyeremény b	Maximális részvételi díj: pontos c_{M}	közelítő $\tilde{c}_{\mathrm{M}}$
1	0,100	0,100
10	1,005	1,002
100	10,450	10,015
1000	146,061	100,150

Sok esetben minden játékos különböző (b, c) párok közül választhat. A legegyszerűbb esetben $(\beta n, \gamma n)$ párok között lehet választani, ahol γ egy szelvény ára, β egy szelvény nyereménye, n pedig az egyedi szelvények száma. Érdekes lenne bemutatni, hogy adott szelvénydíjak mellett hogyan függ a hasznosság a vásárolt szelvények számától, de nem könnyű egy jó elemi modellt alkotni.

Most bemutatunk egy történetileg is nevezetes, szerencsejátékkal kapcsolatos problémát.

17.3. példa. Szentpétervári paradoxon (Daniel Bernoulli, 1735.) Tegyük föl, hogy egy játékos a kaszinóban méltányos játékot játszhat: tetszőleges c díj befizetésével $p = 1/2$ valószínűséggel $2c$ nyereményre tesz szert, $q = 1/2$ valószínűséggel c-t veszít. Tegyük még föl, hogy kezdetben korlátlan sok pénze van. Ekkor a következő nyerőstratégiát játszhatja: az 1. lépésben $c_1 = 1$ Ft-ot tesz fel. Ha nyer, abba hagyja a játékot; ha veszít, megduplázza a tétet. A $k = 1, 2, \ldots$ lépésben dupla vagy semmi alapon $c_k = 2^{k-1}$ Ft a tét. Belátható, hogy $p_k = 1/2^{k-1}$ annak a valószínűsége, hogy a k-adik lépésben nyer először (és utoljára). Szükségünk lesz a végtelen mértani sor összegképletére:

$$a + aq + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{a}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

(Valóban, feltételünk mellett az n-tagú mértani sor számlálójának képletéből kihagyott $-q^n$ aszimptotikusan tart a 0-hoz.) Tehát

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k + \cdots = 1,$$

azaz a játék 1 valószínűséggel véges lépésben befejeződik. Szintén a mértani sor összegképlete alapján, ha $k+1$ lépésből áll a játék, akkor az első k lépésben a játékos összesen $1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ Ft-ot veszít, a $k+1$-edik lépésben 2^k Ft-ot nyer, tehát összességében 1 Ft-ot nyer. A várható érték definíciója alapján tehát a játékos biztosan 1 Ft-ot nyer. Ez paradoxon, hiszen *valaki egy méltányos szerencsejátékban „biztosan” nyer.*

A paradoxon megoldása: eleve gyanús, hogy ha a játékot tetszőleges nagy x kezdőtéttel kezdjük, akkor a nyeremény is x. Másképp érvelve: ehhez a játékhoz várható értékben korlátlan mennyiségű tőkére van szükség, mert $\sum_{k=1}^{\infty} p_k 2^k = \infty$. Meglepő, hogy a játék várható hossza viszont nagyon rövid.

17.4. feladat. Igazoljuk, hogy a játék várható értékben csak 2 lépésig tart: $1 \cdot 2^{-1} + 2 \cdot 2^{-2} + 3 \cdot 2^{-3} + \cdots = 2$!

Érdekesség, hogy Daniel Bernoulli (a Bernoulli-eloszlást és a nagy számok első törvényét [16.6. tétel] felfedező Jakob Bernoulli unokaöccse) ennek a paradoxonnak a megoldása közben fedezte föl a logaritmikus hasznosságfüggvényt [vö. (5.8)].

Hazai adatok

Lássunk most néhány hazai adatot a Qubit 2018.05.30. cikke alapján a monopolhelyzetben lévő Szerencsejáték ZRt. 2017-es forgalmáról. Teljes bevétele 438 mrd Ft, a kifizetett nyeremények: 290 mrd Ft (ennek 15%-a, 43,5 mrd Ft az szja csatornán el sem hagyja az államot) és „egyéb”: 134 mrd Ft, osztaléka 13 mrd Ft.

A forgalom legnagyobb részét a tippmix adja: 143 mrd Ft, itt a tudás valamennyit számít. Az internet szerint a kaparós sorsjegy a betett pénz, 90 mrd Ft, 60%-át osztja vissza. Ezekhez képest a figyelem központjában álló Ötöslottó bevétele jóval kisebb: 49 mrd Ft, és ugyanezen forrás szerint a visszafizetés csak 45%.

Ezzel a játékkal folytatjuk az elemzést. 90 szám közül 5-öt kell eltalálni. 2019-ben hetente kb. 1 mrd Ft volt a bevétel, az akkori 250 Ft-os egységárral számolva hetente 4 millió lottószelvényt adtak el. (Kíváncsi lennék, hogyan oszlik meg ez a szám az 1, 2, 3 stb. szelvényt vevők között.) Az így befolyó összeg előre meghatározott részét – a működési költségek és az állami célok fedezése után – előre meghatározott szabályok szerint osztotta ki az állami monopólium a 2-esek, 3-asok, 4-esek és ritkán, az 5-ösök (telitalálatosok) között. A legtöbb héten nincs telitalálatos, s a megmaradt nyereményt a korábbi felhalmozott 5-ös alaphoz adják. De a 2019. április 20-i húzáskor végre, 38 hét után akadt telitalálat, az addig összegyűlt összeget a szerencsés nyertes kapta. A különböző találatot elért nyertesek számát és a nyereményt a 17.5. táblázat tartalmazza.

17.5. táblázat. Egy öttalálatos hét

Találatok száma	Nyertesek száma	Egy játékos nettó nyereménye (Ft)	Összes nyeremény (Ft)
5	1	4 194 319 530	4 194 319 530
4	50	1 732 680	86 634 000
3	4 097	22 555	92 407 835
2	123 044	2 465	303 303 460

Az öttalálatos lottó jobb megértéséhez először számítsuk ki, hogy egy lottózónak hány szelvényt kellene vennie ahhoz, hogy biztosan telitalálata legyen. (Persze, ilyenkor rengeteg 4-ese, stb. találata is lenne, de ezzel nem foglalkozunk.) Kombinatorikából jól ismert a válasz: 90 elem 5-ödrendű kombinációja

$$N = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 89 \cdot 22 \cdot 87 \cdot 86 = 43\,949\,268.$$

Valóban, a húzási sorrendben az első számot 90, a másodikat 89, a harmadikat 88, a negyediket 87 és az ötödiket 86-féleképp választhatjuk. Mivel ezek függetlenek egymástól, a lehetséges variációk száma ennek az öt számnak a szorzata. Viszont mindegy, hogy milyen sorrendben húzták ki az adott öt számot, és a legnagyobbat 5-, a 2. legnagyobbat 4-, a 3. legnagyobbat 3- és a 4. legnagyobbat 2-féle sorrendben húzhatják ki, s ezek szorzata 5!. Minden variációt ennyivel kell elosztani, azaz marad N. Ha valaki minden lehetséges kombinációt kitöltött volna, akkor 10 987 317 000 Ft-ot, kerekítve kb. 11 mrd Ft-ot fizetett volna.

Nehezen hihető, de dokumentált tény, hogy egyes USA-tagállamokban bizonyos időszakokban rosszul kalkulálták a nyereményosztályokat. Így fordulhatott elő, hogy bizonyos esetekben kellően nagy számú szelvényt ügyesen kitöltve biztos nyereséget lehetett elérni. Előbb-utóbb a dolgokra fény derült és bezárták a „csodamalmot”.

Matematikailag bonyolultabb az olyan szerencsejátékok elemzése, amelyekben a részvevők tudása különböző. Ilyen például a már említett tipmix, amelynek jó kitöltésében sokat segít, ha ismerjük a részvevő csapatok várható teljesítményét. Lassan már kihal a totó, ahol már megjelenik a csalás: bizonyos futballcsapatok játékosai komoly pénzért elvállalják, hogy megbízóiknak megfelelő irányba (értelemszerűen negatívan) befolyásolják a végeredményt. A lóverseny is ehhez hasonló szerencsejáték.

A játékelméleti fejezetben már érintettük a kártyajátékokat. Egyes játékosokat csak a kártyaszenvedély hajt, másokat viszont a pénz. Nyilvánvaló, hogy egy jó játékosnak nagyobb esélye van a nyereségre, mint egy rossz játékosnak, de bizonyos lapokat bárki sikerrel meg tud játszani. Itt is többféleképpen lehet csalni. Hamiskártya a legkézenfekvőbb csalás (nem bízzák a véletlenre a lapjárást). De például a három személy által játszott ultiban két játékos összefoghat, hogy felváltva buknak a harmadikkal együtt, és a játék végén elfelezik kettőjük nyereményét.

18. Regressziószámítás és korreláció*

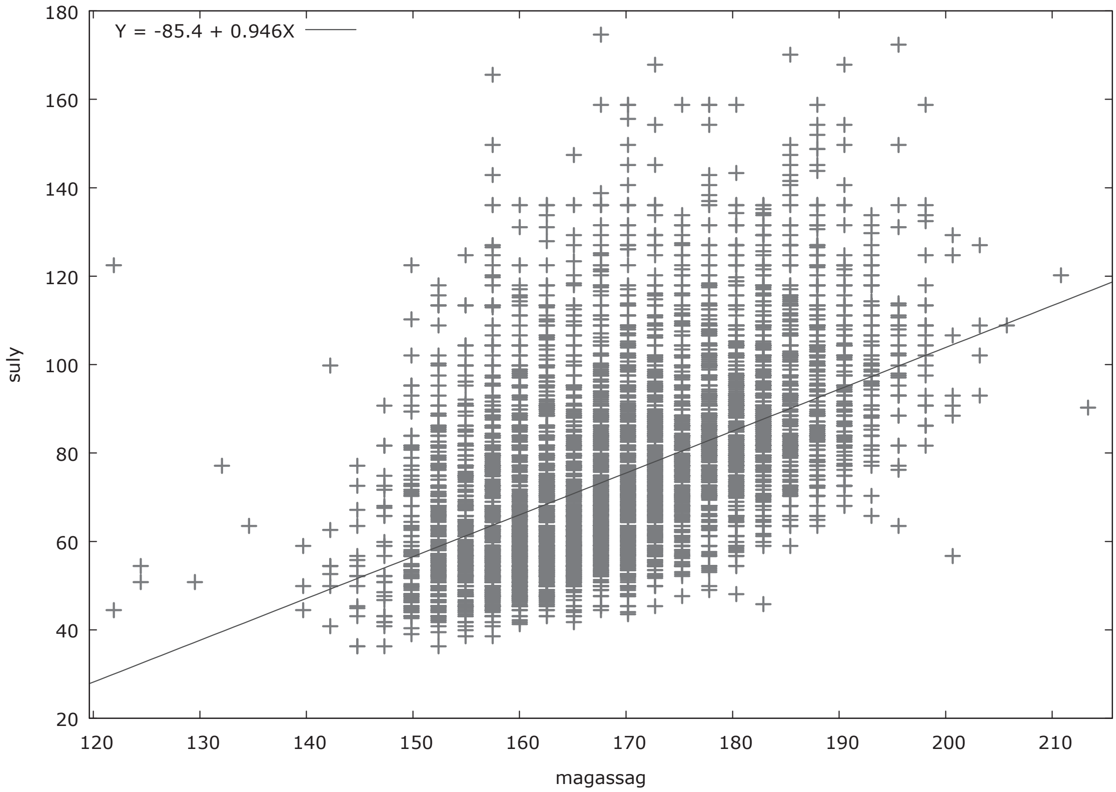
Ebben a fejezetben a matematikai statisztikába vezetjük be a középiskolás szinten álló Olvasót. A 18.1 alfejezetben azt vizsgáljuk, hogyan lehet egy páros megfigyeléssorozat esetén az egyik véletlen sorozatot egy másik véletlen sorozattal lineárisan közelíteni. Szaknyelven fogalmazva: a regressziószámítással optimálisan illesztünk egy magyarázó valószínűségi változót egy magyarázandó valószínűségi változóra – ez a regressziós egyenes. A 18.2. alfejezetben a módszer hibás alkalmazásaira figyelmeztetünk.

18.1. A módszer

Egy köznapi példával indítunk.

18.1. példa. Tömeg–magasság-kapcsolat. Jól ismert, hogy egyéb tényezőktől (életkor, nem, táplálkozás) eltekintve, minél magasabb valaki, annál nagyobb a tömege (súlya). Kérdésünk: statisztikai értelemben a tömeg változékonyságának hányad részét magyarázza meg a magasság? Kőrösi Gábor bocsátott rendelkezésemre egy valóságos népességre számított tömeg–magasság-adathalmazt, 18.1. ábra, s ezen látható a nevezett kapcsolat, és a később elmagyarázandó 94,6%-os kapcsolat.

18.1. ábra. Tömeg–magasság



18.1. példa. A 18.1. táblázatban egy ötelemű mintát mutatunk be, ahol a gyermekkoromban alkalmazott tömeg (kg) = magasság (cm) – 100 képletet némileg eltorzítva adtam meg az „adatokat". (A valóságban minél közelebb van a magasság az átlaghoz, annál gyakoribb az előfordulásuk. Ezen egyszerűen lehetne javítani, ha súlyoznánk a mintát: például a 16-elemű szimmetrikus binomiális mintánál a széleken 1–1 férfi maradna, középen 6, és átmenetben 4–4 férfi, de még akkor is képzeletbeli maradna a példánk, és a kis elemszám megbízhatatlan eredményt adna.)

18.1. táblázat.Tömeg–magasság

Magasság (cm)	170	175	180	185	190
Tömeg (kg)	70	71	80	82	89

Hamarosan belátjuk, hogy h_i-vel jelölve az i-edik férfi magasságát és m_i-vel a tömegét, az e_i a lineáris közelítés *hibáját.* az

$$m_i = \alpha + \beta h_i + e_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

lineáris *regressziós* egyenlet $\beta^* = 0{,}92$ és $\alpha^* = 87{,}4$ számpárnál adja a később megmagyarázott legjobb illeszkedést.

Általánosan tekintsünk két egyforma méretű diszkrét valószínűségi változót: X-et (független) és Y-t (függő). A regressziós egyenes általános képlete

$$Y = \alpha + \beta X + e. \tag{18.1}$$

Szabatosan fogalmazva: arra vagyunk kíváncsiak, hogy ha egy tetszőleges mintában van két valószínűségi változó: X és Y, akkor *lineárisan* milyen mértékben magyarázza X

valószínűségi változó Y-t. Itt nem részletezendő okok miatt az illeszkedés hibáját a hiba szórásnégyzetével mérjük, s ezt akarjuk minimalizálni:

$$\mathbf{D}^2(Y - \beta X - \alpha) \to \min, \qquad \text{feltéve, hogy} \qquad \mathbf{D}^2 X, \mathbf{D}^2 Y > 0. \tag{18.2}$$

Innen ered a név: *a legkisebb négyzetek módszere*, amelyet Gauss német és Legendre (ejtsd: lözsandr) francia matematikus 1800 körül fedezett föl. (Gausst annak idején a matematikusok fejedelmének nevezték – páratlan matematikai képességei elismeréseként.)

A számolás megkönnyítése kedvéért mindkét valószínűségi változóból levonjuk várható értékét: $\hat{X} = X - \mathbf{E}X$ és $\hat{Y} = Y - \mathbf{E}Y$. Így a cél

$$\mathbf{E}(\hat{Y} - \beta\hat{X})^2 \to \min\,. \tag{18.3}$$

18.1. tétel. *(18.3) esetén a legjobb lineáris illeszkedést a*

$$\beta^* = \frac{\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y})}{\mathbf{E}\hat{X}^2} \qquad \text{és} \qquad \alpha^* = \mathbf{E}Y - \beta^*\mathbf{E}X \tag{18.4}$$

képletpár adja.

Megjegyzés. (18.4a) számlálójában megjelenik egy fontos mennyiség: a különbségváltozók szorzatának a várható értéke, neve: *kovariancia* (együttváltozás): $\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y})$. Ha a két különbségváltozó általában egyszerre pozitív vagy egyszerre negatív, akkor a kovariancia pozitív; ha általában külön pozitívak/negatívak, akkor a kovariancia negatív. Megemlítjük, hogy két független valószínűségi változó kovarianciája 0 (vö. 16.4. tétel bizonyítása).

Bizonyítás. Jelölje a (18.3)-beli célfüggvényt $f(\beta)$. A 16.3. tétel értelmében tagonként vehetjük az összeg várható értékét:

$$f(\beta) = \mathbf{E}\hat{Y}^2 - 2\beta\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y}) + \beta^2\mathbf{E}\hat{X}^2. \tag{18.5}$$

Ez β másodfokú függvénye, fölülről nyitott parabola, amelynek a minimumhelye (18.4a). □

18.1. feladat. Bizonyítsuk be (18.4b)-t!

Mielőtt tényleges adatokkal számolnánk, felírjuk a legfontosabb képleteket az egyedi (x_i), (y_i) adatok függvényében. Kezdjük a regressziós egyenlettel!

$$y_i = \alpha + \beta x_i + e_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{18.1$'$}$$

A numerikus számolásban felesleges a különbségváltozókat használni. Helyettük

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \qquad \text{és} \qquad \mathbf{E}Y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n y_j,$$

$$\mathbf{E}X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2, \qquad \mathbf{E}Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n y_j^2 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{E}(XY) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i y_j,$$

$$\mathbf{D}^2 X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2, \quad \mathbf{D}^2 Y = \mathbf{E}Y^2 - (\mathbf{E}Y)^2, \quad \operatorname{cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y.$$

Most már a Csebisev-féle összegegyenlőtlenséget (10.5. tételt) valószínűség-számítási nyelvre is lefordíthatjuk: ha X és Y valószínűségi változó hossza azonos, és elemei monoton növekvő sorrendbe állíthatók, akkor kovarianciájuk pozitív.

A 18.2. táblázat első felében a 18.1. példának a képletek alapján kiszámított legfontosabb statisztikai mutatói szerepelnek. Az utolsó mutatót (r) csak később definiáljuk. A táblázat második felében a becslés hibáit adjuk meg: negatív érték a többletet, pozitív érték a hiányt adja.

18.2a. táblázat. A tömeg–magasság-kapcsolat statisztikai mutatói (18.1. táblázat)

Magasság (cm)	Tömeg (kg)	Magasság (cm)	Tömeg (kg)	Kovariancia	Regresszió	Abszolút	Korrelációs
várható értéke		szórása			együtthatója		
$\mathbf{E}h$	$\mathbf{E}m$	$\mathbf{D}h$	$\mathbf{D}m$	$\mathrm{cov}(h,m)$	β^*	α^*	r
180	78,2	7,071	7,026	46,0	0,920	–87,4	0,926

18.2b. táblázat. A tömeg–magasság-kapcsolat hibamutatói

hiba-1 e_1	hiba-2 e_2	hiba-3 e_3	hiba-4 e_4	hiba-5 e_5
2,0	–3,6	2,8	–2,8	1,6

Kellő számú független adat bírtokában a regressziós egyenest – kellő óvatossággal – *előrejelzésre* is használhatjuk: a független változó $n+1$-edik mérése alapján megjósolhatjuk a függő változó $n+1$-edik „hibamentes” értékét: $\tilde{y}_{n+1} = \alpha^* + \beta^* x_{n+1}$. Ezt tette Gauss az elveszett Ceresz kisbolygó pályájának előrejelzésekor.

Szükségünk lesz X és Y *korrelációs együtthatójára*, amely a kovariancia normalizált (standardizált) értéke:

$$r = \frac{\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y})}{\mathbf{D}X\mathbf{D}Y}, \qquad \text{feltéve,} \quad \text{hogy} \qquad \mathbf{D}X \neq 0 \neq \mathbf{D}Y. \tag{18.6}$$

Hamarosan belátjuk, hogy ez a mutató –1 és +1 között van, és minél nagyobb az abszolút értéke, annál erősebb a lineáris kapcsolat a két változó között. Új oldaláról mutatja be a korrelációs együtthatót a

18.2. tétel. *A korrelációs együttható négyzete azt mutatja, hogy Y szórásnégyzetének hányad részét magyarázza a legjobb lineáris becslés ($\beta^* X$) szórásnégyzete:*

$$\beta^{*2}\mathbf{E}\hat{X}^2 = r^2\mathbf{E}\hat{Y}^2. \tag{18.7}$$

A hibák szórásnégyzete pedig a maradék:

$$\mathbf{E}(\hat{Y} - \beta^*\hat{X})^2 = (1 - r^2)\mathbf{E}\hat{Y}^2. \tag{18.8}$$

Bizonyítás. Hasonlítsuk össze (18.4a)-t és (18.6)-ot: $\beta^*\mathbf{D}X = r\mathbf{D}Y$, majd emeljük négyzetre: $(\beta^*)^2\mathbf{D}^2X = r^2\mathbf{D}^2Y$, ez pedig (18.7).

(18.5) alapján pedig

$$f(\beta^*) = \mathbf{E}\hat{Y}^2 - 2\frac{[\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y})]^2}{\mathbf{E}\hat{X}^2} + \frac{[\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y})]^2}{(\mathbf{E}\hat{X}^2)^2}\mathbf{E}\hat{X}^2.$$

Elvégezve az összevonást, és felhasználva (18.6)-ot, adódik (18.8). □

Következmény. *a) A korrelációs együttható a* $[-1, 1]$ *intervallumba esik:*

$$-1 \leq r \leq 1. \tag{18.9}$$

b) A korrelációs együttható minimumát, illetve maximumát éppen akkor veszi föl, ha a legjobb lineáris becslésben nincs hiba, és rendre csökkenő, illetve növekvő a regressziós egyenes:

$$\text{vagy} \qquad \beta^* < 0, \qquad \text{vagy} \qquad \beta^* > 0. \tag{18.10}$$

Bizonyítás. *a)* Mivel (18.8) bal oldala nem negatív, ezért a jobb oldala sem negatív, tehát $\mathbf{E}\hat{Y}^2 > 0$ miatt $r^2 \leq 1$, azaz (18.9) áll.

b) (18.8) bal oldalán pontosan akkor 0, ha nincs hiba, azaz $\hat{Y} \equiv \beta^* \hat{X}$. (18.6) alapján

$$r = \frac{\mathbf{E}(\beta^* \hat{X}^2)}{|\beta^*| \mathbf{D}^2 X} = \frac{\beta^*}{|\beta^*|}, \tag{18.6'}$$

azaz esetszétválasztással adódik (18.10). □

Rátérünk a súlyozott változókra. Nagyszámú megfigyelés esetén célszerű lehet osztályokba sorolni az adatokat. Legyen N a megfigyelések száma, n az osztályok száma, indexük $i, j = 1, \ldots, n$. Legyen N_{ij} az (i, j) cellába eső megfigyelések száma. Sor- és oszlopösszegeket véve:

$$K_i = \sum_{j=1}^{n} N_{ij} \qquad \text{és} \qquad L_j = \sum_{i=1}^{n} N_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

A relatív gyakoriságok pedig

$$r_{ij} = \frac{N_{ij}}{N}, \qquad p_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \qquad \text{és} \qquad q_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}.$$

Példaként felírjuk a súlyozott átlagokat:

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \qquad \text{és} \qquad \mathbf{E}Y = \sum_{j=1}^{n} q_j y_j,$$

de a többi mutató is hasonlóan felírható.

A regressziószámítás csak elegendően nagy elemszám esetén alkalmazható. Szélsőséges esetben, ha csak két elemünk van, akkor a két pont egy egyenessel összeköthető, ezért a korrelációs együttható vagy –1, vagy +1, azaz a regresszió értelmetlen.

18.2. példa. Történeti érdekességként kitérünk a regressziószámítás elterjesztőjének és névadójának (lásd később), Galton brit statisztikusnak (1870 körül) nevezetes vizsgálatára: mennyire öröklődik apáról fiúra a testmagasság? A szerző $n = 928$ apa–fiú-pár adatát hasonlította össze. A 18.3. táblázatban adjuk meg a minta néhány fontos statisztikai mutatóját (Kőrösi Gábortól kaptam ezt a fájlt).

18.3. táblázat. Apa–fiú magasságpár statisztikája, hüvelykben

	Átlag	Medián	Szórás	Minimum	Maximum
Apa F	68,31	68,50	1,787	64,6	73,0
Fiú S	68,09	68,20	2,518	61,7	73,7

Figyelemre méltó, hogy Galton, ha nem is cm-ben, de a hazájában a mai napig szokásos láb mellőzésével csupa hüvelykben adta meg a magassági adatokat. Páros elemszámú mintánkban a *medián* a csökkenő sorba rendezett minta két középső értékének az átlaga, azaz ugyanannyi apa, illetve fiú magassága nagyobb, mint ahányé kisebb a mediánnál. Galton mintájában mind az apák, mind a fiuk mediánja nagyon közel esik a megfelelő átlaghoz, a szórások kicsik az átlagokhoz képest, és a fiúk minimuma jóval kisebb, mint az apáké (de ez lehet csak egy „kisiklás” is).

Galton a következő regressziós egyenletet becsülte:

$$s_i = \alpha + \beta f_i + e_i,$$

ahol f_i és s_i az i-edik apa (father) és fia (son) magassága. Azt találta, hogy az átlagnál magasabb apáknak az átlagnál magasabb fiúk van, de a fiúk mérete kevésbé emelkedik ki, mint az apáké: $\beta = 0{,}646$ – jóval kisebb mint 1: tehát a fiúk magassága visszatér az átlaghoz. Ezért választotta Galton az eljárás jelzőjét regressziónak (regression = visszatérés).

Indulásként az átlagot véve, és a hibák várható értékét 0-nak tekintve, $\mathbf{E}S = \alpha + \beta\mathbf{E}F$. A levezetés kedvéért feltehetjük, hogy az átlagmagasság változatlan: $\mathbf{E}S = \mathbf{E}F$ (a valóságban $68{,}09 < 68{,}31$; de a százalékos hiba kicsi). Ha az 1. apa magassága átlag fölötti volt: $f_1 > \mathbf{E}F$, akkor a vitatható $e_1 = 0$ feltevéssel élve $s_1 = \alpha + \beta f_1$-ről azt kell belátni, hogy $\mathbf{E}F < s_1 < f_1$. A korrelációs együttható négyzetének értéke: $r^2 = 0{,}21$ arra utal, hogy öröklődik a magasság, de csak részben.

18.2. feladat. Igazoljuk Galton eredményét: $\mathbf{E}F < s_1 < f_1$!

Végül szükségünk lesz a korrelációs együtthatónak a regressziószámításnál szélesebb körű alkalmazására. Felidézzük a 16. fejezetből a kétdimenziós eloszlás fogalmát, (r_{ij}) együttes, valamint p_i és q_j peremeloszlásokkal. (18.6) ilyenkor is alkalmazható, és segíthet a megértésben.

18.3. példa. Szemléletesen mutatja a korrelációs együttható jelentését a következő 4-elemű szimmetrikus példa. Legyen X és Y valószínűségi változó értékkészlete 0 és 1, együttes eloszlásukat a 18.4. táblázat adja, $p, q > 0$, $p + q = 1/2$.

18.4. táblázat. Kétdimenziós szimmetrikus eloszlás

Y / X	0	1	együtt
0	p	q	1/2
1	q	p	1/2
együtt	1/2	1/2	1

Könnyű belátni, hogy $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 1/2$, $\mathbf{E}X^2 = \mathbf{E}Y^2 = 1/2$, tehát $\mathbf{D}X = \mathbf{D}Y = 1/2$. Ugyancsak egyszerű, hogy $\mathbf{E}(XY) = p$, $\mathrm{cov}(X, Y) = p - 1/4$, azaz $r(X, Y) = 4p - 1$. Ahogy p növekszik 0-ról 1/2-re, úgy növekszik $r(X, Y)$ értéke –1-ről +1-re. Szavakban: ahogy növekszik a főátló súlya a mellékátló rovására, úgy vált negatívról pozitívra a korrelációs együttható. Középúton, $p = q = 1/4$, a két eloszlás egymástól független, összhangban $r = 0$-val.

18.2. Hibás alkalmazások

Ebben az alfejezetben bemutatjuk a módszer néhány hibás alkalmazását.

Félrevezető lehet a regressziószámítás, ha egy vagy több fontos magyarázó változót kihagyunk. Ezt szemlélteti a tömeg–magasság példa következő általánosítása.

18.4. példa. Tömeg–magasság–jövedelem-kapcsolat. Több fejlett országra jellemző, hogy a magasabb jövedelműek magasabbak és soványabbak, mint az átlag, de ez a statisztikus előtt rejtve marad. A 18.5. táblázat a legegyszerűbb karikatúrapéldát mutatja be.

18.5. táblázat. Tömeg–magasság, kihagyott jövedelem

Magasság (cm)	160	165	170	175
Tömeg (kg)	80	60	90	70

Az 1. és a 3. típus szegény, átlagban alacsony és kövér, a 2. és a 4. típus gazdag, átlagban magas és sovány. Hiába teljesül mindkét osztályra a magasabb–nagyobb tömegű kapcsolat, a 18.5. táblázat adataival az átlagra már 0 korreláció adódik (18.6. táblázat). Mellesleg ez arra is példa, hogy a 0 korreláció nem jelenti a két változó függetlenségét!

18.6. táblázat. A tömeg–magasság-kapcsolat statisztikai mutatói, kihagyott jövedelem

Magasság (cm)	Tömeg (kg)	Magasság (cm)	Tömeg (kg)	Kovariancia	Regresszió	Abszolút	Korrelációs
várható értéke		szórása			együtthatója		
Eh	**E**m	**D**h	**D**m	$\mathrm{cov}(h,m)$	β^*	α^*	r
167,5	75	5,590	11,180	0	0	75	0

Ha a valódi összefüggés *nemlineáris*, és ezt nem vesszük észre, akkor is félrevezető regressziót kapunk. Szemléltetésként tényellentétesen tegyük föl, hogy Galilei 1638-ban publikált zseniális lejtőkísérleteiben négyzetes helyett lineáris regressziót használt: a pontos érték $s_t = (g \sin\gamma)t^2/2$, a regresszió viszont $s_t^{\mathrm{L}} = \alpha + \beta t$. A 18.7. táblázatban $\gamma = 1/10$ dőlésszögű, súrlódás és közegellenállás mentes lejtőn mutatjuk be a kísérleti adatokat, és lineáris „becslésüket". (Mellesleg Galilei annyira csak a négyzetes törvény kvalitatív megtalálására koncentrált, és olyan durván volt kénytelen mérni az időt, hogy g-re a helyes érték, 9,81 m/sec^2 felét kapta – természetesen az akkori mértékegységben.) A táblázat első fele a becslési adatokat, második fele pedig a tényleges és a becsült utat mutatja meg. Vigyázat: elvileg hibás becslés, a negatív kezdő út árulkodó, és az adatok 3 tizedesjegyes pontossága irreális!

18.7a. táblázat. A négyzetes út–idő-törvény lineáris „becslése"

Idő(sec)	Út (cm)	Idő(sec)	Út (cm)	Kovariancia	Regresszió	Abszolút	Korrelációs
várható értéke		szórása			együtthatója		
Et	**E**s_t	**D**t	**D**s_t	$\mathrm{cov}(t,s_t)$	β^*	α^*	r
3	6,366	2,000	6,116	11,752	2,938	–2,448	0,961

18.7b. táblázat. A négyzetes út–idő-törvény lineáris „becslése” – hiba

Idő (sec) t	Tényleges út (m) s_t	Becsült út (m) s_t^L
0	0	–2,448
1	0,490	0,490
2	1,959	3,428
3	4,407	6,366
4	7,835	9,304
5	12,242	12,242
6	17,629	15,180

Ha viszont t^2 és véletlen hibákkal megfigyelt s_t páros között keresünk korrelációt, akkor $\beta = g/2 \approx 5$ körüli eredményre számíthatunk.

A korreláció alkalmazásakor nem szabad lemondani a józan ész alkalmazásáról. Két adatsor között véletlenül is lehet szoros korreláció, és az ilyen hamis korreláció alkalmazása tévedést okozhat. A 18.8. táblázat (Kőrösi Gábor ajándéka) 11 évre megadja a Miss America életkorát és a forró eszközzel elkövetett (röviden: forró) gyilkosságok áldozatainak számát az Egyesült Államokban; korreláció 0,87.

18.8. táblázat. Miss America életkora és a forró gyilkosságok áldozatainak száma

Év t	Miss America életkora x_t	Áldozatok száma y_t	Év t	Miss America életkora x_t	Áldozatok száma y_t
1999	24	7	2005	24	7
2000	24	7	2006	21	4
2001	24	7	2007	20	2
2002	21	3	2008	19	3
2003	22	4	2009	20	2
2004	21	3			

Hagyjuk ki a mintából a 2009. évet, és akkor már 2008-ban feltételes előrejelzést készíthetünk a csonka mintán becsült $y_t = -17{,}987 + 1{,}031x_t$ regressziós egyenessel: ha az $x_{2009} = 20$ esetet eltaláljuk, akkor (kerekítéssel) forró gyilkosság áldozataira 5 adódik a tényleges 2 helyett.

19. A regressziószámítás közgazdasági alkalmazásai*

A közgazdaságtanban széles körben alkalmazzák a regressziószámítást; még olyankor is, amikor nem lenne szabad, például amikor (X_t) és (Y_t) időben gyorsan növekvő sorozat, hiszen ilyenkor nem X_t, hanem t a lényeges magyarázó változó. (Gyakori példa: a kibocsátás hamis magyarázata a népességgel, holott közben a termelékenység is növekszik.) Mi hasznos alkalmazásokat igyekszünk bemutatni: A 19.1. alfejezet a relatív árszint és a fejlettség kapcsolatát tanulmányozza. A 19.2. alfejezet a nyugdíjba vonulási kor és a szolgálati idő közti kapcsolatot vizsgálja: normális nyugdíjrendszerben a kapcsolat pozitív, egyébként negatív.

19.1. Az árszint és a fejlettség kapcsolata

Aki már járt külföldön, az láthatta, hogy forintra átszámolva a külföldi árakat, azok mennyire mások lehetnek. A leghíresebb ilyen összehasonlítás a The Economist brit hetilap Big Mac indexe, amely 1986 óta rendszeresen összehasonlítja a nevezett MacDonalds termék árát különböző országok azonos típusú boltjaiban. A 19.1. táblázat néhány országra dollárra számítva, csökkenő sorrendben összehasonlítja a termék árát.

19.1. táblázat. Big Mac index, dollárban, 2019. júliusában

Ország	Ár	Ország	Ár
Svájc	6,54	Horvátország	3,33
Egyesült Államok	5,74	Magyarország	3,10
Svédország	5,38	Lengyelország	2,84
Brazília	4,60	Egyiptom	2,53
Nagy-Britannia	4,10	Románia	2,20
Csehország	3,77		

Ezek a számok csak korlátozottan alkalmasak a nemzeti valuták értékének összehasonlításra, mert a szendvicsek sem teljesen azonosak, és egyebek mellett az adókulcsoktól is függenek.

2002 óta az EU számos országában használnak közös pénzt, szemmel láthatóvá téve, hogy statisztikusan minél alacsonyabb az egy főre jutó GDP (y), annál alacsonyabb az (átlagos) árszint (P). De megfelelő statisztikai munkával ez a jelenség más, eurózónán kívüli országokra is megmutatható. Kiindulás a Balassa–Samuelson-hatás (1964): minden nyitott piacgazdaság két részből áll, a külkereskedelemben részt vevő és részt nem vevő szektorból. Az elsőben a hazai árak követik a nemzetközi árakat, de a másodikban nem. Például hiába ugyanolyan termelékeny egy magyar fodrász, mint egy osztrák, a bére reálértéke csak fele a másikénak. Ezért a 2018-as 1 euró = 320 forint árfolyam mellett azonos típusú tv Bécsben 300 EUR, azaz Budapesten 96 eFt; egy férfi hajvágás 20 EUR Bécsben, de csak 10 EUR = 3200 Ft Budapesten. (A volt szocialista országok nem voltak piacgazdaságok, ezért ott hatványozottan érvényesült az árak kétszintűsége: 1970-ben 1 uszodabelépő 1 kg kenyér árába került, egy színes tv többhavi átlagbér volt – mai árakon 300 Ft, illetve kb. 1 mFt – szemben a mai 1500 Ft, illetve 100 eFt-os árral.)

Az adatokat a 2 × 3-oszlopos 19.2. táblázat tartalmazza (amelyből Írország statisztikai rendellenesség miatt kimaradt). Előrebocsátom, hogy szándékosan tartottam meg az országok angol neveit és sorrendjét. Be akartam mutatni, milyen ostoba rendszert használ az EU: az egyes országok angol nyelvű neve helyett saját nyelvű nevét használva teszi be az angol ábécé szerinti sorrendbe, pl. Magyarország H helyett az M-nél szerepel Hungary névvel. Súlyozatlan átlagot használnak, tehát a törpe Málta ugyanolyan súllyal szerepel, mint a hatalmas Németország. Mind a fejlettség, mind az árszint esetében az átlag 100%. Például az átlaghoz közeli Franciaország fejlettsége 104%, árszintje 109%. Magyarországnál fordított eltérést látunk: 68%-os fejlettséghez 62%-os árszint társul. További figyelmeztetés: nemcsak a fogyasztási cikkek és szolgáltatások, hanem a beruházási javak árai is figyelembe vannak véve. (A 2.1. táblázat néhány tagország 2010–2018-as fejlődését mutatta be.)

19.2. táblázat. Fejlettség és árszint, EU, 2017

Ország i	GDP/fő y_i	GDP-árszint P_i	Ország i	GDP/fő y_i	GDP-árszint P_i
Belgium	117,0	110,5	Lithuania	78,0	63,4
Bulgaria	49,0	48,2	Hungary	68,0	61,8
Czechia	89,0	68,4	Malta	96,0	83,2
Denmark	125,0	133,8	Netherlands	128,0	112,1
Germany	123,0	107,1	Austria	128,0	110,1
Estonia	77,0	75,7	Poland	70,0	58,1
Greece	67,0	82,3	Portugal	77,0	81,4
Spain	92,0	90,4	Romania	63,0	51,0
France	104,0	109,5	Slovenia	85,0	82,6
Croatia	61,0	64,2	Slovakia	77,0	67,9
Italy	96,0	98,9	Finland	109,0	124,3
Cyprus	84,0	89,2	Sweden	122,0	129,8
Latvia	67,0	68,9	UK	105,0	111,9

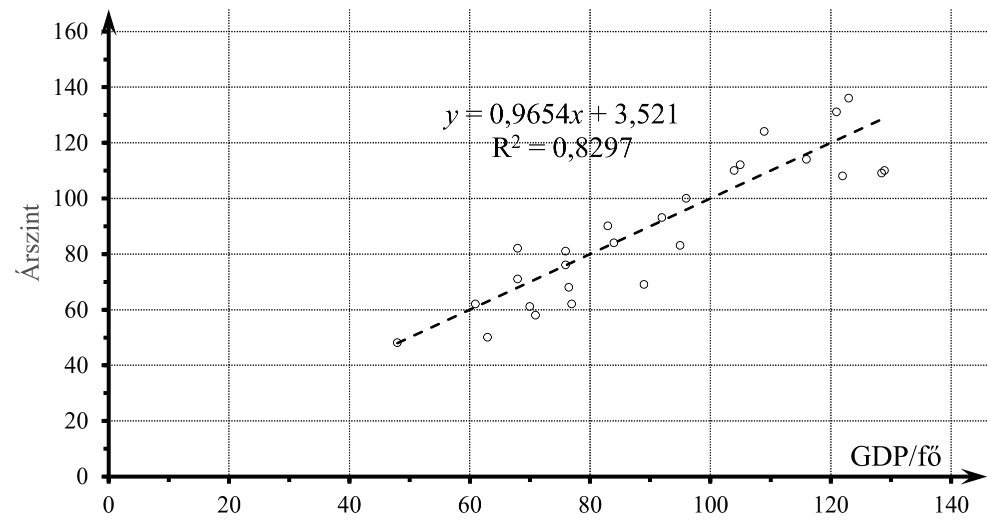
Oblath Gábor rendelkezésemre bocsátotta számításai eredményét, amelynek egy részét itt közreadom. A regressziós egyenes a fejlettség lineáris függvényében magyarázza az árszintet:

$$P = 0{,}965y + 3{,}5; \quad r^2 = 0{,}83.$$

Nyitva hagyjuk, hogy mennyire javítható a regresszió nemlineáris illesztéssel.

A 19.1. ábra bemutatja a regressziós egyenest. Egyébként a legtöbb szoftverben egyszerűen számíthatók ezek a mutatók.

19.1. ábra. Árszint–fejlettség



19.2. A nyugdíjba vonulási kor és a szolgálati idő kapcsolata

Ebben az alfejezetben a nyugdíjba vonulási kor és a szolgálati idő kapcsolatát vizsgáljuk.

Pozitív korreláció

Elméleti nyugdíjmodellekben gyakran teszik föl, hogy a szolgálati idő (S) a nyugdíjba vonulási kor (R) és a munkába állási kor (Q) különbsége: $S = R - Q$ [pl. (10.8)]. Mivel $Q \approx 19$ év, azt hihetnénk, hogy R és S közti korrelációs együtthatója 1. De a dolgozók jelentős részének töredezett munkaviszonya van (még a gyermeknevelés miatt otthon töltött évek beszámításával is), ezért érdemes egy folytonossági együtthatóval általánosítani az $S(R)$ kapcsolatot: $S = \varphi(R-Q)$, $0 < \varphi \leq 1$. Jól működő gazdaságban a nyugdíjba vonulási kor és a szolgálati idő között pozitív marad a korreláció. (Hamarosan találkozunk olyan nyugdíjrendszerrel is, ahol a korreláció negatív.) Itt egy képzeletbeli példát adunk. Két nyugdíjba vonulási kor létezik: R_1 és $R_2(> R_1)$, és két folytonossági együttható: φ_1 és φ_2, $0 < \varphi_1 < \varphi_2 \leq 1$. Ekkor négy különböző szolgálati idő áll elő:

$$S_{ij} = \varphi_i(R_j - Q), \qquad i, j = 1, 2.$$

Nyilvánvaló, hogy $S_{11} < S_{21}, S_{12} < S_{22}$. Ha $S_{21} < S_{12}$, azaz $\varphi_2(R_1 - Q) < \varphi_1(R_2 - Q)$, akkor a négytagú Csebisev-összegegyenlőtlenség (10.6. tétel) feltétele teljesül, a korreláció pozitív. Ellenkező esetben bizonyítani kellene a pozitivitást, de erről lemondunk.

Azt mondhatjuk, hogy normális nyugdíjrendszerben a rövid szolgálati idő tipikusan korai nyugdíjba vonulási korral párosul, hosszú szolgálati idő pedig késői nyugdíjba vonulással – ez pozitív korrelációs együtthatót ad.

Berkson-paradoxon és a Nők40/merev korhatár

Végül a Berkson-paradoxont (1946) és egy közgazdasági alkalmazását mutatjuk be. A nevezett paradoxont eredetileg egészségügyi statisztikában fedezte fel névadója, de itt a Wikipédia egyszerűbb példáját ismertetem tovább egyszerűsítve.

19.1. példa. Tegyük föl, hogy egy amerikai egyetemre felvételiző diákoknak két fontos jellemzőjük van: X= tudás és Y = sportbeli ügyesség. Mindkettő bináris változó: 0 és 1; 1/2–1/2 valószínűséggel, egymástól függetlenül. Egy diákot akkor vesznek föl az egyetemre, ha legalább az egyik ismérv szerint jó: $\max(X, Y) = 1$. Ezek szerint a diákok 3/4-ét felveszik, és a felvett diákokra az (X, Y) változó együttes eloszlása a következő: $(1, 1)$, $(1, 0)$ és $(0, 1)$ egyenként 1/3 valószínűséggel. Mivel a $(0, 0)$ párt kizártuk, ezért $r < 0$. Eredetileg független két változó paradox módon a szűrés után negatív korrelációt mutat. Ezt a példát általánosítja a

19.1. feladat. A 19.3. táblázat egy 2×2-es valószínűségi eloszlást ad meg, amelynek bal felső sarka 0, s ujjgyakorlatként ennek statisztikai mutatóit vizsgáljuk.

19.3. táblázat. Tükrözött L-alakú eloszlás

X / Y	0	1	együtt
0	0	p	p
1	q	$1-p-q$	$1-p$
együtt	q	$1-q$	1

a) Indokolja meg számolás nélkül, hogy miért negatív X és Y korrelációs együtthatója: $r(X, Y)$!

b) Határozza meg $r(X, Y)$-t p, q függvényében!

c) Hogyan egyszerűsödik a képlet szimmetrikus eloszlás esetén?

d) Mi $r(X, Y)$ numerikus értéke, ha $p = 1/4$?

Ismert, hogy 2011–2012 óta hazánkban a férfiak csak az *általános nyugdíjkorhatár* elérése után mehetnek nyugdíjba: $R^* = 63$ év (2016), de a nők akkor is nyugdíjba mehetnek, ha legalább $S^* = 40$ évnyi jogviszonyt szereztek (Nők40). A nőket vizsgálva, megfelelő aggregálással a 19.4. táblázat kétdimenziós eloszlását kapjuk. Például a DK-i cella 0,09 értéke azoknak a nőknek a részaránya, akik egyszerre érték el a 40 éves jogviszonyt és a 63 éves korhatárt. Ugyanakkor a korhatáron visszavonulók várható szolgálati ideje csak 31,4 év.

19.4. táblázat. Szolgálati idő és nyugdíjba vonulási kor együttes eloszlása, 2016, nők, HU

Életkor (év) / Szolgálati idő (év)	Korai $R = 58{,}6$	Korhatár $R^* = 63$	Átlagosan $\mathbf{E}R = 60{,}6$
Rövid $S = 31{,}4$	0	0,36	0,36
Elegendő $S_{\mathrm{m}} = 41{,}2$	0,55	0,09	0,64
Átlagosan $\mathbf{E}S = 37{,}8$	0,55	0,45	1,00

Elhanyagolva a csoportokon belüli szórásokat, a korrelációs együttható

$$r(R, S) = -\sqrt{\frac{pq}{(1-p)(1-q)}}$$

Numerikusan: $p = 0{,}55$ és $q = 0{,}36$; $r(R, S) = -0{,}822$. A belső szórások figyelembevétele leviszi a korrelációs együtthatót –0,6-ra, majd –0,53-ra.

20. Járvány és válság

Az utóbbi évtizedek járványaival ellentétben a 2020 elején megjelenő koronavírus teljesen megváltoztatta a világ gazdasági működését. Ez bizonyára felkeltette a könyv számos olvasójának az érdeklődését a *járványmodellek* iránt. A 20.1. alfejezet a legelterjedtebb járványmodellt mutatja be (az ún. SIR-féle modell, Kermick–McKendrick–Walker, 1927). Le kell mondanunk a koronavírus terjedésének tényleges modellezéséről, tehát csak bevezetésre számítson az Olvasó. A 20.2. alfejezetben a válság 2020 áprilisában várható hatásainak modellezéséről elmélkedünk.

20.1. Egy járványmodell

Megnehezíti dolgunkat, hogy *dinamikus* folyamatról van szó, ahol minden pillanatban a már fertőzöttek egy része megfertőzi a még nem fertőzöttek (röviden: megfertőzhetők) bizonyos részét, miközben a fertőzöttek másik része meggyógyul vagy meghal. A szakirodalmat követve, ebben a leírásban a könnyebb érthetőség érdekében több végletesen egyszerűsítő feltevést teszünk: *a)* a népesség létszáma időben állandó; *b)* a fertőzésben senki sem hal meg; *c)* ha valaki kigyógyul a fertőzésből, az már nem fertőződik meg újra; *d)* a fertőzési valószínűség független a népesség egyéb (nemi, életkori, területi, egészségi stb.) jellemzőitől; *e)* a gyógyulási valószínűség független az egészségügyi ellátástól.

Három típust különböztetünk meg: a *megfertőzhetők* (susceptibles, S), (népességi) részarányuk $s > 0$; a *fertőzöttek* (infectious, I), részarányuk $i > 0$; végül a *gyógyultak* (recovered, R), de ide tartoznak az eleve immunisak is: részarányuk $r > 0$, innen a modell közkeletű elnevezése: SIR-modell. Az ilyen típusú modelleket egyébként *rekesz*modelleknek nevezik.

Egyenleteinkben kulcsszerepet kap a fertőzési és a gyógyulási ráta. Ezek függvényében igazoljuk, hogy *a megfertőzhetők részarányának kicsi kezdőértékeire elhal a járvány, és nagy kezdőértékeire fellángol.* Azt is szemléltetni tudjuk, hogyan laposítja el a járvány időbeli lefutását, ha a fertőzési rátát elkülönítéssel vagy a megfertőzhetők részarányának kezdőértékét oltással csökkentjük.

A technikai egyszerűség kedvéért és a szokással ellentétben, nem folytonos, hanem diszkrét időben írjuk föl a népességi részarányok dinamikáját, egységnyinek rögzítve az időszak hosszát, pl. nap, hét, $t = 0, 1, 2, \ldots$ az időszakok indexe. A jobb érthetőség kedvéért az $S \to I \to R$ időrendi sorrendet felcserélve $S \to R \to I$ sorrendben adjuk meg a három egyenletet.

Föltesszük, hogy az *új* fertőzések részaránya egyaránt arányos a megfertőzhetők és a fertőzöttek részarányával, de az *újonnan* gyógyultak részaránya csak a fertőzöttek részarányával arányos. Visszatérünk a „rekeszek tartalmára”.

A *megfertőzhetők részarányának csökkenése* egyenesen arányos a megfertőzhetők részarányának és a fertőzöttek részarányának szorzatával:

$$s_{t+1} - s_t = -\beta s_t i_t, \tag{20.1}$$

ahol $\beta > 0$ a fertőzési ráta.

A *gyógyultak részarányának növekedése* egyenesen arányos a fertőzöttek részarányával:

$$r_{t+1} - r_t = \gamma i_t, \tag{20.2}$$

ahol $\gamma > 0$ a gyógyulási ráta.

A későbbiekben hasznos lesz, ha feltesszük, hogy a gyógyulási ráta kisebb a fertőzési rátánál, és a fertőzési ráta legfeljebb 1: $0 < \gamma < \beta \le 1$.

Mivel mindenki vagy megfertőzhető, vagy fertőzött, vagy gyógyult, ezért a három részarány összege 1:

$$s_t + i_t + r_t = 1,$$

azaz az összeg időbeli változása 0:

$$s_{t+1} - s_t + i_{t+1} - i_t + r_{t+1} - r_t = 0.$$

Ebbe behelyettesítve (20.1)–(20.2)-t, következik

A *fertőzöttek részarányának változása:*

$$i_{t+1} - i_t = (\beta s_t - \gamma) i_t. \tag{20.3}$$

Figyeljük meg, hogy (20.3) jobb oldalán két tag különbsége szerepel: a kisebbítendő az új fertőzések részaránya, a kivonandó pedig az újonnan gyógyultaké.

Bevezetjük a megfertőzhetők részarányának *kritikus értékét*, amelynél a (20.3) egyenlet jobb oldala 0, azaz a fertőzöttek részaránya változatlan (maximális):

$$s^{\mathrm{o}} = \frac{\gamma}{\beta} < 1.$$

Becsempészve (20.3)-ba s^{o}-t, jobban látszik s^{o} szerepe a fertőzöttek részarányának alakulásában:

$$i_{t+1} - i_t = \beta(s_t - s^{\mathrm{o}}) i_t. \tag{20.4}$$

Mivel r_t nem hat sem s_{t+1}-re, sem i_{t+1}-re, ezért a (20.2) egyenlettel ráérünk utólag törődni; a modell magva (20.1) és (20.4), vagy alkalmasabb alakban:

$$s_{t+1} = (1 - \beta i_t) s_t \tag{20.5}$$

és

$$i_{t+1} = [1 + \beta(s_t - s^{\mathrm{o}})] i_t. \tag{20.6}$$

A kétváltozós elsőrendű (20.5)–(20.6) nemlineáris differenciaegyenlet-rendszer (rekurzió) (s_t, i_t) megoldása (pályája) a kezdeti részaránypárostól függ: (s_0, i_0), ahol $i_0 \approx 0$ (nagyon kicsi pozitív szám, a fertőzés hirtelen jelenik meg), és helyet hagyva az esetleg pozitív r_0-nak, $s_0 \le 1 - i_0$. Magától értetődik, de mégis bizonyítandó a

20.1. segédtétel. *A (20.5)–(20.6) rendszer pályái megengedettek:*

$$s_t, i_t \ge 0 \qquad \text{és} \qquad s_t + i_t \le 1. \tag{20.7}$$

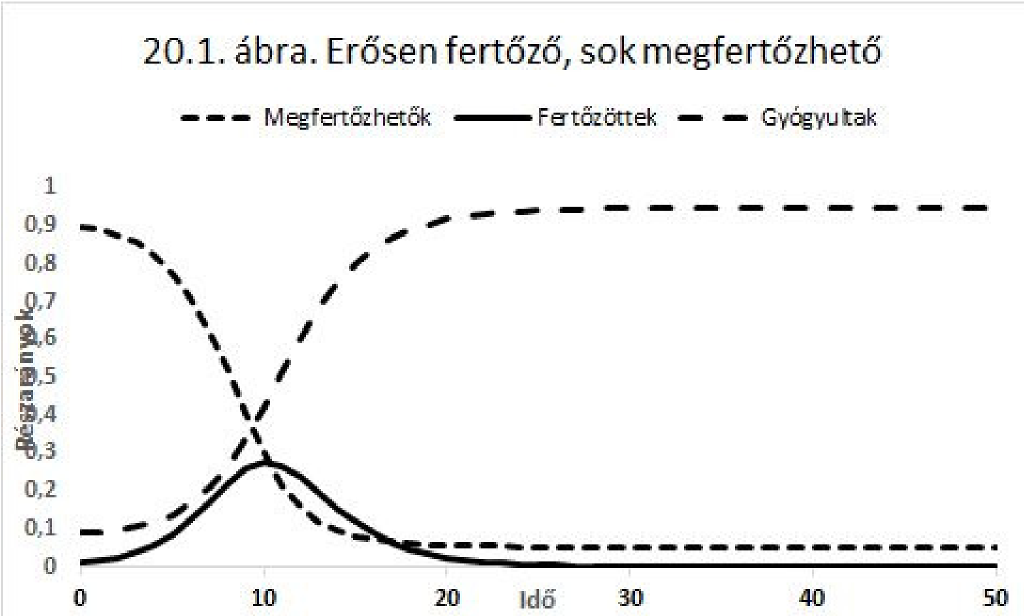
Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk: feltevés szerint (20.7) teljesül $t = 0$-ra, és belátjuk, hogyha (20.7) teljesül t-re, akkor teljesül $t + 1$-re.

Amíg $i_t \ge 0$, addig (20.2) értelmében $r_{t+1} \ge r_t$. Mivel $s_t + i_t = 1 - r_t$, ezért $s_{t+1} + i_{t+1} \le s_t + i_t \le 1$. □

(20.1)-ből és (20.3)-ból következik, hogy amíg van fertőzött, addig a megfertőzhetők részaránya monoton csökken, a gyógyultaké viszont monoton nő.

Most már kimondható az

20.1. tétel. *a) Ha a megfertőzhetők részarányának kezdőértéke legfeljebb a kritikus érték: $s_0 \le s^o$, akkor a fertőzöttek részaránya monoton tart a 0-hoz. b) Ha a megfertőzhetők részarányának kezdőértéke nagyobb, mint a kritikus érték: $s^o < s_0 < 1$, akkor a fertőzöttek i_t részaránya egészen addig növekszik, amíg a megfertőzhetők részaránya nem csökken a kritikus érték alá, aztán pedig i_t aszimptotikusan 0-hoz tart.*



Bizonyítás. *a)* Ha $s_0 \le s^o$, akkor $s_t < s^o$ $(t > 0)$. Két alesetet különböztetünk meg.

(i) Ha $s_0 < s^o$, akkor (20.6)-ot felírva $0, 1, \ldots, t-1$ időszakra, és figyelembe véve, hogy $s_{t-1} < \cdots < s_1 < s_0$, adódik

$$i_t = [1 + \beta(s_{t-1} - s^o)] \cdots [1 + \beta(s_0 - s^o)]i_0 < [1 + \beta(s_0 - s^o)]^t i_0, \qquad (20.8i)$$

azaz i_t gyorsan tart 0-hoz.

(ii) Ha $s_0 = s^o$, akkor az első lépést külön kell kezelni. $i_1 = i_0$, és (20.5) szerint $s_1 = (1 - \beta i_0)s^o$, majd (20.8i) szerint

$$i_t < [1 + \beta(s_1 - s^o)]^{t-1} i_1 = [1 - \beta^2 i_0 s^o]^{t-1} i_0, \qquad t \ge 1. \qquad (20.8ii)$$

b) $0 < s^o < s_0 < 1$ esetén, amíg a megfertőzöttek részaránya nagyon kicsi: $i_t \approx 0$, addig (20.5) miatt $s_t \approx s_0$ (csak lassan csökken), tehát i_t részarány (20.6) és $s^o < s_0 < 1$ miatt közelítőleg egy $1 + \beta s_0 - \gamma$-hányadosú mértani sorozat szerint nő. Belátjuk, hogy előbb-utóbb s_t a kritikus érték alá süllyed, s *a)* szerint i_t ezután végleg csökkenésre vált.

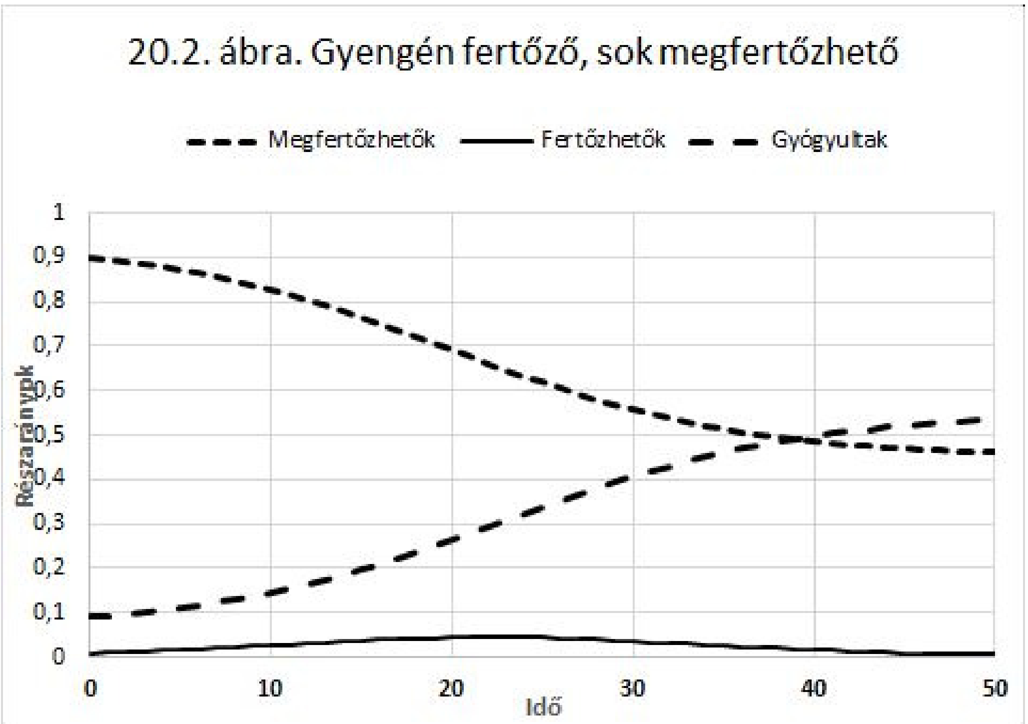
Indirekt bizonyítunk. Tegyük föl, hogy $s_t \ge s^o$ minden t-re áll. Az (s_t) alulról korlátos csökkenő sorozat, tehát van határértéke, amelyre $s^* \ge s^o$ áll. (20.6) szerint $i_t \ge i_0$, azaz (20.5) szerint $s_t \le (1 - \beta i_0)^t s_0$, azaz $s^* = 0$, s ez ellentmond $s^* \ge s^o > 0$-nak. □

További vizsgálatot igényelne, hogy hosszú távon milyen esetben szűnik meg a megfertőzhetőség (és válik teljessé a gyógyultság), számpéldáinkban azonban az idők végezetéig maradnak megfertőzhetők.

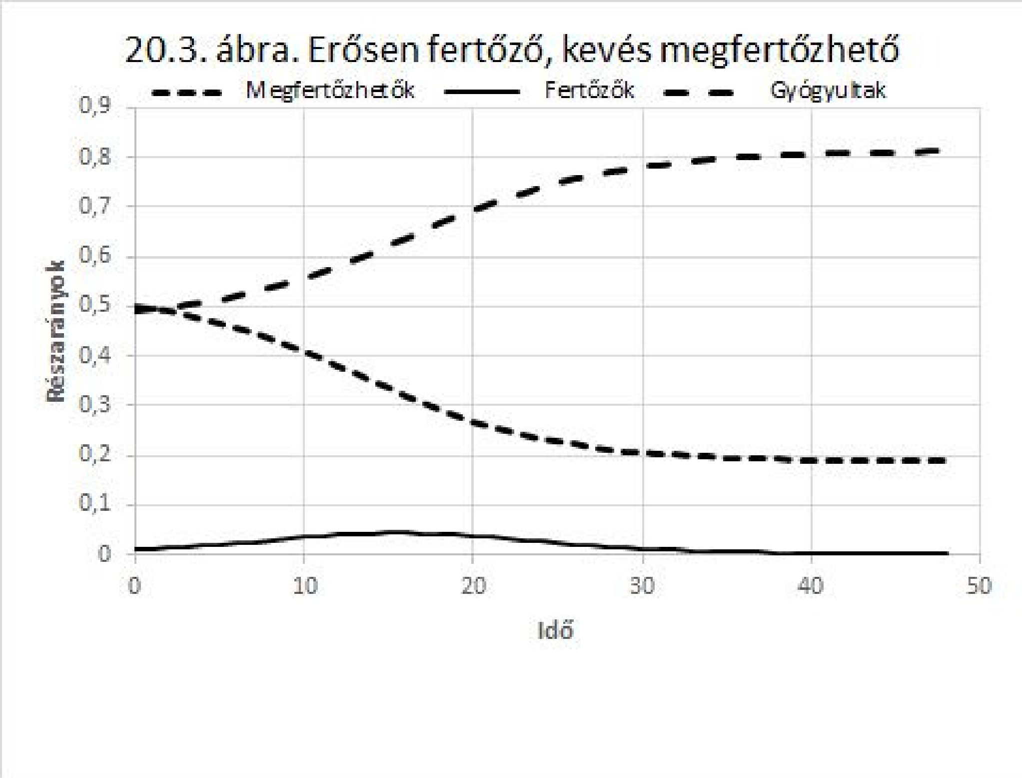
Rátérünk a numerikus szemléltetésre. Önkényesen választjuk, hogy $i_0 = 0{,}01$. Első futásunkban $\beta = 1$ és $\gamma = 1/3$, valamint a megfertőzhetők részarányának nagy kezdőértéket adunk: $s_0 = 0{,}9 > s^o = 1/3$. Egyszerű programmal elkészíthetjük a 20.1. ábrát.

Legérdekesebb eredmény: a 10. időszakban éri el a fertőzöttség a maximumát, a lakosság 27,7%-a fertőzött. A 20. időszakra a fertőzöttség gyakorlatilag eltűnik, de további számítások szerint a megfertőzhetőség megmarad 5%-nál.

A második futásban feltesszük, hogy elkülönítéssel sikerült az erős fertőzési rátát gyengíteni: $\beta = 0{,}5$. A 20.2. ábra legérdekesebb eredménye: a fertőzöttségi maximumot jóval később, a 22. időszak körül érjük el, s a lakosságnak csupán 4,5%-a fertőzött, de a megfertőzhetők részaránya lassabban csökken, és megáll 45%-nál.



A harmadik futásnál feltesszük, hogy oltással sikerült a megfertőzhetők nagy kezdőrészarányát jelentősen csökkenteni, de a kritikus érték fölött maradva $s_0 = 0{,}5 > s^o$. A fertőzési ráta újra nagy: $\beta = 1$. A 20.3. ábra szerint a maximális fertőzöttség ismét 4,4%, de már a 16. időszakban elérjük, és alacsonyabb lesz a megfertőzhetők részarányának határértéke: 19%.



20.3. ábra. Erősen fertőző, kevés megfertőzhető

Összefoglalásként, ne várjunk csodákat egy modelltől. Ez a modell csak a legegyszerűbb összefüggéseket képes megvilágítani, például, hogy létezik a megfertőzhetők részarányának egy kritikus értéke, amely alattról és fölöttről indítva a rendszert, az nemcsak kvantitatíve, de kvalitatíve is másképp viselkedik. Modellünk azonban számos kérdésre nem válaszol: például mennyire növeli meg a gyógyulás valószínűségét az elkülönítés a fertőzési folyamat lassításával (lesz elég lélegeztetőgép).

20.2. Járványok és gazdasági válságok

Különböző járványoknak különböző korszakokban különböző gazdasági hatásuk van. Itt három világjárványt érintünk gazdasági szempontból.

1) Az ún. fekete halál 1347-ben érkezett meg Európába. Dél- és Nyugat-Európában a népesség jelentős része hónapokon belül meghalt, Európa ritkán lakott részeit viszont a járvány kevésbé érintette. Közgazdaságilag a legérdekesebb hatása a munkaerőhiány okozta reálbéremelkedés volt. Ezt legegyszerűbben a 6. fejezetben tárgyalt termelési függvénnyel fejthetjük ki, $\beta = 1 - \alpha$ specifikációval – eltekintve a technikai fejlődéstől:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}. \tag{6.3''}$$

Haladó mikroökonómiából ismert, hogy adott K tőkeállomány és L munkaerő mellett az egyensúlyi kamatláb és -órabér rendre

$$r = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} \qquad \text{és} \qquad w = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}. \tag{20.9}$$

Kitérő.* Aki ismeri a kétváltozós függvény parciális deriváltjainak fogalmát, az felismeri, hogy (6.3″) esetén (20.9) nem más, mint

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} \qquad \text{és} \qquad w = \frac{\partial Y}{\partial L}. \tag{20.10}$$

Szóban: a kamatláb a termelés tőke szerinti parciális deriváltja, az órabér pedig a munkakínálat szerinti parciális derivált.

Behelyettesítve (20.9)-et (6.3″)-ba, adódik, hogy a tőke és a munka díja együtt pontosan kiadják a termelés költségét:

$$Y = rK + wL, \tag{20.11}$$

hiszen

$$rK + wL = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}K + (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}L = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = Y.$$

(20.9)-ből látható, hogy ha L hirtelen csökken, akkor w nő, és r csökken. Ez magyarázatot ad arra, hogy 1348 után pl. a munkakínálat zuhanása Angliában hozzájárult a jobbágyság megszűntéhez.

2) Az ún. spanyol nátha az I. világháború utolsó évében lángolt föl, és különféle okok miatt a népesség 1-2%-át elpusztította. Maradandó hatását nehéz elkülöníteni a négyéves háború pusztításaitól.

3) Az ún. koronavírus-járvány 2020. elején tört ki Kínában, és hamarosan kiterjedt az egész világra. Minden egészségügyi haladás ellenére a sorok írásakor (2020. áprilisában) nem rendelkezünk hatásos ellenanyaggal. A járvány elején még voltak olyan vélemények, amelyek a fenyegető gazdasági károkra való tekintettel nem támogatták a távolságtartást: az iskolák és gyárak/intézmények bezárásását, a határok időleges lezárását. De a fejlett nyugat-európai országokból és az Egyesült Államokból érkező napi többszázas halálozási számok majdnem mindenütt elhallgattatták az ellenvéleményeket (egyedül Svédország tart ki a nyitvatartás mellett). Furcsa módon az elzárkózás csak lassítja, de nem akadályozza meg a járvány terjedését. Azt remélhetjük, hogy ha időben nem is érkezik meg a csodaszer, a járvány ellaposítása mentesíti az egészségügyi rendszert az összeomlástól.

Mit tehetnek az egyes országok kormányzatai a szokatlan gazdasági károk enyhítéséért? Többé-kevésbé egyetértés alakult ki abban, hogy vállalva az időleges eladósodást, minden kormánynak közpénzből mindenáron életben kell tartania az életképes vállalkozásokat és segíteni kell a keresetük drámai csökkenésétől sújtott állampolgárait a túlélésében.

• „Ma” még nem tudjuk, milyen lesz a járvány okozta válság lefutása. De érdemes a könyvben szereplő modellek közül néhányat újraértékelni a mondottak fényében.

A gazdasági növekedést tárgyaló modellünkből (2.2. alfejezet) hiányzott a *véletlen*. Legegyszerűbb példa a véletlen hatásra az időjárás. Ötven–száz évvel ezelőtt a mezőgazdasági termelés sokkal nagyobb szerepet játszott a fejlett országok gazdaságában, mint ma; és akkor az időjárás szerepe érezhetően befolyásolta a gazdasági növekedést. Például amikor még az összetermelés 30%-a származott a mezőgazdaságból, és a rossz idő elvitte a termés 20%-át, akkor a determinisztikus modellhez képest ez önmagában 6%-kal csökkentette a kibocsátást. Ha meg jó idő volt, akkor hasonló mértékben módosította, csak ellenkező irányban. Képletben

Kibocsátás–tőke

$$Y_t = A_t K_{t-1}, \qquad t = 1, 2, \ldots, \tag{2.5′}$$

ahol A_t a kibocsátás–tőke-hányados egy olyan véletlen változó (sorozata), amelynek a várható értéke $A = \mathbf{E}A_t$.

• A (2.22) egyenlet a következő adatok mellett írja le az USA államadósság 2020-as robbanását: tavaly évvégi államadóssághányad: $d_{2019} = 0{,}78$; idei egyenlegráta: $e_{2020} = -0{,}18$; idei kamattényező: $R_{2020} = 1$ és idei növekedési együttható: $G_{2020} = 0{,}94$. Valóban, a 2020. dec. 31-i becsült államadósság-hányad: $d_{2020} = 1{,}01$.

• Már a 4.4. alfejezet ciklusmodelljének (4.18) fogyasztási egyenlete is képes valamennyi segítséget nyújtani a keresletihány okozta válság megértésében:

$$C_t = C^{\mathrm{A}} + \gamma Y_{t-1}, \tag{4.18}$$

ahol C_t a t-edik időszak fogyasztása, C^{A} az autonóm rész, γ pedig azt mutatja, hogy az előző időszak Y_{t-1} termeléséből mekkora hányadból lesz fogyasztás. A válságban Y_{t-1} süllyed, tehát állami eszközökkel, C^{A} emelésével érdemes a fogyasztást fenntartani, vagy legalábbis süllyedését fékezni. A jelenlegi válságot az bonyolítja, hogy a keresletihány és a kínálathiány együtt lép fel.

Akármilyen lesz is a válság, tanulságosnak tartom az egyik legjobb hazai közgazdasági kutatóműhely, a TÁRKI-Kopint 2020. április 7-i jelentésének összefoglaló táblázatát (9. o.) közölni. (Előtte és utána számos más előrejelzés is megjelent, de ezeket nem ismertetem.) A fő hangsúly a 2019. decemberi és a 2020-as áprilisi előrejelzések közti különbségen van. A jobb olvashatóság kedvéért az eredeti egy táblázatot három táblázatba tördelem.

A 20.1. táblázat a nemzeti össztermék (GDP) összetevőinek tényleges és előrejelzett reálnövekedését mutatja be. Kiemeljük, hogy a beruházások tavalyi növekedése eleve lassult volna idén, de a 2019. decemberében még azt gondolták, hogy szinte minden összetevő legalább 3%-kal nő. A járvány hatására 2020. áprilisában már csökkenést jeleztek elő, mégpedig nagyot.

20.1. táblázat. Nemzeti össztermék (GDP) és összetevőinek változása, HU, %

Időszak Mutatók	Tény 2019	Előrebecslés 2020-ra 2019:12	 2020:04
GDP	4,9	3,2	–5,5
Belföldi felhasználás	5,6	3,4	–4,4
Magánfogyasztás	4,4	3,7	–3,8
Közösségi fogyasztás	2,0	0,0	–0,6
Tőke-felhalmozás	15,3	5,0	–7,8
Export	6,0	5,0	–8,8
Import	6,9	5,1	–7,8

A 20.2. táblázat részletesebb számokat közöl a lakossági szférára, a 2020:I. negyedévi adatokat is tartalmazva. Az infláció egész évre várható mérséklődése lassulni fog, a munkanélküliség megugrik, és számomra meglepő módon a nettó reálkeresetek nem csökkennek, csak a növekedés jelentősen tovább lassul.

20.2. táblázat. Lakossági szféra, HU, %

Időszak Mutatók	Tény 2019	 2020:I	Előrebecslés 2020-ra 2019:12	 2020:04
Fogyasztói árindex	3,4	4,4	3,4	3,8
Munkanélküliségi ráta	3,4	3,5	3,3	7,5
Nettó reálkeresetek	7,7	4,3	4,9	2,1
Megtakarítási ráta (GDP)	5,0	–	4,0	5,0

A 20.3. táblázat első két sora az államháztartási adatok változását mutatja be. A költségvetési hiány 1-ről 4%-ra ugrik, és a GDP zuhanása miatt (vö. (2.22) egyenlet) az adósságráta nem csökken, hanem megugrik. A világkereskedelem növekedés helyett zsugorodásba vált, a legfontosabb termék, az olajár zuhan. Az EU gazdaságok két (részben közös) része, az eurózóna és az új tagországok növekedési üteme előjelet vált.

20.3. táblázat. Államháztartási és külső dinamika, %

Időszak / Mutatók	Tény 2019	Előrebecslés 2020-ra 2019:12	2020:04
Államháztartási egyenleg/GDP (HU)	–2,0	–1,0	-4,0
Bruttó adósság/GDP (HU)	66,3	66,5	73,9
Világkereskedelem növekedése	4,0	3,2	–3,9
Eurózóna GDP	1,2	1,2	–5,2
Új EU-tagországok GDP	3,6	3,0	–3,9

Tanulságos lehet a Brent olajár (USD/hordó) meredeken csökkenő pályájának táblázaton kívüli bemutatása: 64,4 (2019), 59,7 (2020. december), 63,0 (2020. I. negyedév) és 45,0 (2020 egész év, előrejelzés). 2020. április 21-én pár pillanatra 10 USD-re süllyedt az ár.

21. Utószó helyett

Áttekintettünk néhány tucat közgazdasági modellt. Némelyikük majdnem triviális volt, mások viszont sokáig elkerülték még a legjobb közgazdászok figyelmét is.

Azoknak a középiskolásoknak (és nemcsak középiskolásoknak, hanem például a tanáraiknak vagy más érdeklődőknek), akiket érdekel a matematika közgazdaságtani alkalmazása, ez a könyv számos témát kínált, amelyek elsajátításával elmélyíthették tudásukat. A hangsúly majdnem mindig a közgazdaságtanon volt, itt a matematika csak „szolgálólány”. (*Majdnem* mindig-et írtam, mert egy-két helyen a matematika vette át a főszerepet. Például a káoszelmélet közgazdasági alkalmazásait éppen csak érinti a könyv, mégsem volt szívem kihagyni az alkalmazások alapjául szolgáló elméletet.)

A közgazdaságtan sokkal összetettebb jelenségekkel foglalkozik, mint a középiskolából legjobban ismert modellező tantárgy, a fizika. A gazdaságban nincsenek olyan egyszerű helyzetek, mint a mechanikában a lejtő vagy a Föld Nap körüli keringése. Ezért a közgazdaságtani modellek sokkal esetlegesebbek, mint a fizikaiak. Mégis megkíséreltem bevezetni az Olvasót e bonyolult témakörbe. Remélem, hogy a könyv egyes fejezeteit elsajátítva, jobban érti majd a közgazdaságtant; s emellett tágítja tudását a matematika alkalmazásáról. A 21.1. alfejezetben megpróbálkozom a közgazdasági modellezés óvatos kritikájával, a 21.2. alfejezetben röviden utalok a könyvből kihagyott legfontosabb témákra, a 21.3. alfejezetben pedig a közgazdasági modellekkel kapcsolatos személyes emlékeimet osztom meg az Olvasóval.

21.1. Kritika

Elvben végtelen sok közgazdaságtani modell készíthető, és a modellkészítő azzal büszkélkedhet, hogy milyen kifinomult leírást képes kitalálni. Nagyon gyakori a közgazdaságtanban, hogy valaki általánosít egy korábbi modellt, és megmutatja, hogy a korábbi modell mondanivalója általánosabb feltételek mellett is igaz vagy hamis. Bizonyos értelemben az elméleti közgazdaságtan egyre inkább hasonlít a matematikára, ahol a logikus következtetés az egyetlen kívánalom. Bár nem vagyok alkotó matematikus, azt azért megkockáztatom, hogy nem minden matematikai elmélet kelt egyforma érdeklődést. Természetesen a matematikusok között is vannak éles viták, hogy ez vagy az az elmélet az érdekesebb, de azért előbb-utóbb kialakul egy közmegegyezés, hogy ez érdekes, az meg nem. (Például a valóban korszakalkotó Bolyai–Lobacsevszkij-féle nemeuklideszi geometria 1830 és 1860 között észrevétlen maradt, hogy aztán elinduljon világhódító útjára.)

A közgazdaságtanban azonban sokkal nehezebb kiválasztani a megfelelő modellt. Eleve nagyon nehéz megbízható adatokat találni. (Például hányan tudják, hogyan függ a 2.4. táblázatban szereplő magyar államadósság nagysága a forint árfolyamától, az 1998 és 2010 között létező kötelező magánnyugdíj-pénztár méretétől stb.?) Azt sem könnyű eldönteni, hogy egy nagyon bonyolult kérdés modellezésekor mit lehet elhanyagolni és mit nem (lásd az említett példákat). Végül, inkább művészet, mint tudomány annak megítélése, hogy a gazdaságpolitikai következtetések mennyire érzékenyek a modellválasztásra.

Nem szabad hallgatni arról sem, hogy az ösztönző rendszer problémái miatt a megjelenő közgazdasági eredmények minősége gyakran problematikus. Elvben a tudományos verseny biztosítja, hogy a jobb elmélet legyőzi a rosszabbat. A matematikai megközelítés önmagában megkönnyíti az összehasonlítást: a jobb modell kevesebb feltevésből ugyanannyit – vagy akár többet – ér el (Occam borotvája, 14. század). A kopernikuszi modell ebből a szempontból is jobb, mint a ptolemaioszi: egyszerűbb és pontosabb. De a közgazdaságtanban túlzottan nagy szerep jut az ízlésnek és az ideológiának, amikor a folyóiratok szerkesztői publikációkról döntenek.

Ennek kapcsán szólnom kell a modern közgazdaságtan egy különlegességéről: 1950 és 2000 között közgazdászok egyre nagyobb része feltette, hogy a szereplők – kisebb-nagyobb statisztikai hibáktól eltekintve – jól értik a helyzetüket és optimálisan döntenek. Nemcsak jól, hanem optimálisan! (Azóta némileg változott a közgazdászok hozzáállása.) Hőseink bonyolult matematikai feladatot oldanak meg, hogy megtalálják a legjobb gazdasági döntést. Például ha egy lakótelepi lakás előtt luxusautó, vagy egy luxusvilla előtt tragacs áll, akkor ezen nem kell meglepődni, a tulajdonosnak ez a preferenciája.

De túlbuzgó közgazdászok még az alkoholizmust is próbálják optimalizálással megmagyarázni. (Az alkoholista aránytalanul jobban szereti a bort, mint a süteményt; és ha egyszer rászokott az alkoholra, akkor nagyon nehezen adja föl e rossz szokását.) És ha egy közgazdász nem hajlandó követni az „egyedül helyes tudományos megközelítést”, és nem optimalizál, akkor könnyen a szakma peremére szorulhat; még ha jobb is a modellje, mint azoké, akiknek a szereplői „optimalizálnak”. Ezt a következő hasonlattal lehet érzékeltetni: az elegáns étterembe be lehet menni gyűrött zakóban és pecsétes nyakkendőben (mert a gyűröttség és a pecsételtség ellenőrizhetetlen), de a tiszta ing önmagában nem elegendő (a zakó és a nyakkendő hiánya ellenőrizhető). Pedig a tisztaság fontosabb az „eleganciánál”! És a reális modell fontosabb az optimalizálónál!

Irodalmi vonatkozásai miatt is érdemes szólni a modern közgazdasági modellek további sajátosságáról, az önbeteljesítő jóslatokról, vagy szakszerűbben, a racionális várakozásokról. A görög mitológiából ismert Oidipusz tragédiája, akinek a születésekor a vak jós megjövendölte, hogy felnővén megöli apját, a királyt. Hogy elkerüljék az apagyilkosságot, Oidipuszt az apja elküldte a háztól. Aztán Oidipusz felcseperedett, összetalálkozott az apjával, ismeretlenül összevesztek, és a végén a fiú megölte az apját. Íme, az önbeteljesítő jóslat. Ha nem hittek volna benne, akkor az apa és a fia halálukig békében élhettek volna együtt. Ezzel ellentétes jellegű Jézus nevezetes jóslata. Elfogatásakor Jézus azt mondta Péternek, hogy mielőtt a kakas megszólal, Péter háromszor megtagadja őt. És valóban, a kakas megszólalásáig Péter éppen háromszor árulta el Jézust. Itt csak Jézus előrelátását mutatja a történet, de nem a jóslat okozta az árulást.

A modern közgazdaságtan (a már említett Lucas-szal az élen) beleszeretett az önbeteljesedő jóslatokba (általánosabban, a racionális várakozásokba). Az elv helyes, például Nash egyensúlya is racionális várakozáson alapul. Kiindulásként tegyük föl, hogy a mai cselekedet függ a jövőre irányuló várakozástól és a jövő függ a mai cselekedettől. A megközelítés felkent képviselői gyakran felteszik, hogy a szereplő olyan előrejelzést választ, amely mellett a gerjesztett cselekedet éppen az előrejelzett állapothoz vezet. Például, ha 2008 nyarán a közvélekedés szerint egy hordó olaj ára 130-ról hamarosan 140 dollárra emelkedik, ezért egy ország stratégiai kőolajkészletét kezelő cég az ország háromhavi fogyasztását fedező készletét kiegészítette még egy havival. Mivel sokan cselekednek hasonlóan, emiatt valóban 140 dollár lesz az új olajár. De aztán hirtelen vége szakadt a varázslatnak, és az olajár összeomlott. Ugyanez történt az amerikai, a brit és a spanyol lakásárakkal. Persze, a feltevés hívei is tisztában vannak ezzel a problémával, és védekezésként a véletlen hatások mögé bújnak. De talán elfogadja az Olvasó, hogy számos esetben (4.4, 13.4. és 15.1–2 alfejezet) a várakozás mégsem racionális.

Némi leegyszerűsítéssel azt mondhatjuk, hogy a 2007-ben Amerikában kezdődött pénzügyi válság, és a 2008-ban a világ nagy részére átterjedő gazdasági válság részben a modellekben hívő szakemberek és politikusok felelőssége. Ha a politikusok bizalmatlanabbak lettek volna a közgazdászokkal szemben, és a közgazdászok kétkedőbbek saját modelljeikkel szemben, akkor a kormányzatok talán óvatosabb gazdaságpolitikát folytattak volna, és nem kellett volna évekig a válság következményeitől szenvedni.

De még évekig nagy vita dúlt világszerte, hogy mennyire kell szigorú gazdaságpolitikát folytatni, hogy ne szabaduljon el az infláció, vagy ellenkezőleg, mennyire kell laza gazdaságpolitikát folytatni, hogy elkerüljék az általános áresést, a deflációt. (A defláció több évtizedig csak a tankönyvek rémálma volt, de az utóbbi két–három évtizedben Japánban sok kárt okozott: nem volt érdemes beruházni, mert mire a beruházás drága pénzből megvalósult, az eladott termék túl olcsóvá vált.) Különböző modellek különböző eredményeket adnak, és sokszor még utólag sem könnyű eldönteni, hogy melyik közgazdásznak volt igaza. Például az 1929-ben kezdődött Nagy Válság értelmezéséről még ma is folyik a tudományos vita. A 2020. elején kitört koronavírus-járványnak e sorok írásakor még nincs vége, de gazdasági következményei fenyegetőek.

A jó modell segít a tájékozódásban, a rossz akadályoz. De sokszor csak utólag tudjuk meg, hogy mi volt a jó, és mi volt a rossz modell. A közgazdaságtanban külön nehézséget jelent a modellezendő kérdések bonyolultsága és a tanácsadók, illetve a politikusok magánérdekei. Türelmesnek kell lennünk a közgazdasági modellezőkkel, de nem szabad bennük vakon bíznunk.

21.2. Ami a könyvből kimaradt

Ebben az alfejezetben röviden utalok azokra a legfontosabb közgazdasági kérdésekre, amelyek a könyvből kimaradtak, pedig a hagyományos tankönyvekben fontos szerepet játszanak.

A mikroökonómiában kiemelkedő szerepet játszanak a preferenciák. Bár a Cobb–Douglas-féle hasznosságfüggvényekben használjuk a preferenciasúly elnevezést, a hagyományos elméletben nagy hangsúlyt kapnak a hasznosságfüggvényeknél elvben jóval általánosabb *preferenciarendezések*. Ha hasznosságfüggvény hiányában esetleg nem tudom megmondani, hogy (1) egy szendvicset és két pohár narancslét mennyivel értékelek többre/kevesebbre, mint (2) két szendvicset és egy pohár narancslét, azt könnyen meg tudom mondani, hogy (1)-et többre értékelem vagy kevesebbre, mint (2)-t, esetleg közömbös, hogy a két kombináció közül melyiket választom.

Feltételes optimalizálásként tárgyaljuk az azonos időszak alatt két termék közti választást, de (a 6.1. fejezet egyetlen bekezdését leszámítva) nem foglalkozunk az egyik legfontosabb ilyen választással: a munkakínálattal, ahol a szabadidő és a fogyasztás között választunk. (Hacsak a nyugdíjba vonulás korának megválasztását nem tekintjük munkakínálati kérdésnek, 10.2. alfejezet.)

Hasonlóan fontos lenne a *helyettesítési* és a *jövedelmi hatás* kettéválasztása. Például amikor egy fontos termék (benzin) ára emelkedik, akkor a másik, helyettesítő termék (élelem) kereslete gyakran nőne, de a reáljövedelem-csökkenés miatt az is csökkenhet. Erre vonatkozik a viccben szereplő alkoholista apa panasza: nem tud elég tejet venni gyermekeinek, mert nagyon megdrágult a vodka. Ugyanakkor szokatlanul nagy figyelmet szentelünk a Leontief-féle hasznosságfüggvénynek, ahol semmilyen helyettesítés sincs, tehát minden árhatás jövedelmi. A kalkulus (differenciál- és integrálszámítás) elkerülése miatt kényszerülünk ezekre a csonkításokra.

A hagyományos mikroökonómiában a vállalati döntések elemzésében alapvető a rövid és hosszú távú költségfüggvény megkülönböztetése. Rövid távon a tőke adott, tehát csak a munkamennyiség igazodik a keresletehez. Hosszú távon azonban a tőke is változtatható, mi burkoltan ezt tételezzük fel a 6. fejezetben.

A könyv makroökönömiai részeiben több ponton is érintjük az inflációt, de hallgatunk okairól (12. és 13. fejezet). Egy végletes felfogás szerint az inflációt a túlzott pénzkínálat okozza, de hát a pénz nem is szerepel a könyvben. Szinte teljesen elhanyagoljuk a munkanélküliséget is (épp hogy megjelenik a Hicks-modellben), pedig 1936 körül éppen a hatalmasra dagadó munkanélküliség elemzésére, illetve csökkentésére találta ki Keynes a makroökonómiát. Bizonyos értelemben éppen a munkanélküliség „természetellenes” csökkenése okozza az inflációt vagy annak gyorsulását. További ok: a kormányzat így veszi vissza könnyelmű költségvetési politikájának gyümölcseit.

Jó lett volna a zárt gazdaság mellett a nyitott gazdasággal is foglalkozni, ahol egy ország úgy tudja kibontakoztatni lehetőségeit, hogy bizonyos termékeket exportál (kivisz), másokat viszont importál (behoz). A külső eladósodás (2.4. alfejezet) és a devizaalapú jelzáloghitel (13. fejezet) elemzése csak érinti a kérdéskört, de itt is kényelmi okok indokolják, hogy tartózkodunk a témától.

21.3. Emlékek

Az egyes modellek kifejtését nem akartam megzavarni a személyes háttér ismertetésével, de a könyv végére érve néhány kapcsolódó emléket megosztok az Olvasóval.

Bár nemcsak középiskolásoknak, hanem általánosabban a hozzájuk hasonló tudásszintű embereknek írtam e könyvet, néhány mondatban mégis kitérek saját idevágó középiskolai élményeimre. 1962 és 1965 között a Radnóti Miklós Gyakorló Iskolában Kugler Sándorné tanított nekünk fizikát. Akkor még a szombat rendes iskolai nap volt, és a fizikaszakkört du. 1 és 2 óra között tartotta Györgyi néni. Ez volt a hét csúcspontja. Minden alkalommal a szakkör tagjai (Patkós András, azóta akadémikus, Vadász István vezető mérnök és én) megoldottuk a Györgyi néni által gondosan kiválasztott fizikafeladatokat, és közben megtanultunk logikusan gondolkodni. Tíz év alatt további két fizikusakadémikus és számos más kutató került ki Györgyi néni keze alól.

Ugyanebben az időben rendszeresen részt vettem a Reiman István által szervezett „Fiatal Matematikusok Körében”, ahol sok elgondolkodtató feladatot oldottunk meg együtt, sok érdekes matematikai témából hallgattam előadásokat, és közben megismertem későbbi egyetemi társaimat és egyben barátaimat is. Egy központi fizikaszakkörön pedig Wiedemann László tartott különlegesen érdekes és egyetemi szintű előadásokat.

1. A közgazdasági modellekről c. fejezet (és a 21.1. alfejezet) 50 éves modellezési gyakorlatom leszűrése. 1970 és 1990 között Kornai János vezetése alatt modelleztem a hiánygazdaságot, és próbáltam meg elsajátítani mesterem modellezési filozófiáját. Távirati stílusban a következőket szűrtem le az együttműködésből: *a)* a gazdaság egy dinamikus rendszer, *b)* amelynek szereplői általában nem optimalizálnak, különösen akkor, ha fontos egyszeri döntéseket hoznak (pályaválasztás, családalapítás); *c)* a vizsgálatokban világosan el kell különíteni a leíró és a normatív szempontokat (az *ami van*-t az *amit szeretnénk*-től).

Visszatérve az 1. fejezetben említett metrósémára, első londoni utamon e séma és belvárosi tapasztalataim alapján terveztem meg külvárosi látogatásom. A sémán egyforma távolságban elhelyezett állomások a valóságban – a központból kifelé haladva – egyre távolodnak egymástól. A téves alkalmazás miatt félórát késtem a vendégségből.

2. Az egyszerű dinamika c. fejezet eléggé szabványos anyag, de például az osztrák–magyar fejlettség dinamikájáról szóló paradoxonnal már 1968-ban is találkoztam, és még ma is találkozom vele – „szakértők" tollából. Hasonló a helyzet a növekvő államadósság–csökkenő államadósság-hányad paradoxonával.

3. A játékelméleti bevezető és elemi optimalizálás c. fejezetből a 3.1. (játékelméleti) alfejezet első változatát Urbán János felkérésére írtam meg 1994-ben, amikor a magyar származású Harsányi János, az amerikai John Nash és a német Richard Selten közgazdasági Nobel-díjat kapott. Felemelő élmény volt, amikor évekkel később Kiss Géza meghívására beszélhettem a játékelméletről az Apáczai János Gyakorló Iskola zsúfolt termében középiskolásoknak és tanáraiknak. A 3.2. alfejezet nagymértékben támaszkodik Mérő (1996)-ra. A 3.3. alfejezet (elemi optimalizálás) Hódi Endre (1963/1998) munkájára vezethető vissza, amellyel még 1965 körül ismerkedtem meg. Ekkor ragadott meg a Jensen-egyenlőtlenség egyszerűsége is.

4. A bonyolultabb dinamika c. fejezetből a 4.1–4,2. alfejezet azon a felismerésen alapul, hogy ha a magasabb rendű helyett a másodrendű differenciaegyenletekre szorítkozunk, akkor a megoldás másodfokú egyenlet és szögfüggvények segítségével tárgyalható. A 4.3. fejezet második, valóban n-változós differenciaegyenletének stabilitását középiskolás koromban Vadász Istvántól hallottam.

A 4.2. feladat általánosításával 1970 és 1990 között több munkatársam alkalmazta sikerrel a *szocialista* beruházási ciklusok modellezésére, abc-sorrendben: Bauer Tamás, Kornai János, Lackó Mária, Soós Károly Attila, Tarján Tamás. Ezzel ellentétben a 4.4. alfejezet modellje a *piacgazdaságok* beruházási ciklusairól szólt. A modellel még egyetemistaként, az MTA Közgazdasági Intézetében a néhai Bródy András vezette szemináriumon ismerkedtem meg 1968 körül. 1982 után kezdtem a szocialista beruházási ciklusok modellezésével foglalkozni, és ott is jó szolgálatot tett Hicks gondolatmenete.

2000 körül egy nagy sikerű angol nyelvű tankönyvben olvastam egy ledorongoló ismertetést a Hicks-modell lineáris változatáról, amely valóban késhegyen táncol. Levélben hívtam föl az ismerős szerzők figyelmét, hogy elhallgatták Hicks zseniális nemlineáris kiegészítését. A szerzők a kritikát „csípőből" visszautasították, de a következő kiadásból kihagyták a modellt, s vele együtt az igazságtalan bírálatot. Középiskolás olvasóim remélhetőleg megbocsájtják, hogy a 4.4. alfejezetben egy valóban késhegyen táncoló modellt mutattam be nekik, és a 7.3. alfejezet végén is csak vázoltam a nemlineáris általánosítást.

5. A fogyasztói döntések és hasznosságmaximum c. fejezet újdonsága a kalkulus elkerülése. Ha több ábra lenne a könyvben, akkor itt könnyebb lenne a kifejtés, de ez ellenkezne az algoritmikus megközelítésünkkel, tudniillik, hogy általában számolunk, és nem rajzolunk. Oktatási szempontból új a hiperbolikus leszámítolás tárgyalása. Személyes fogyasztási tapasztalat: 1974-ben meg akartam venni életem első sztereorádióját. Háromféle árú típus közül választhattam: 6, 9 és 12 eFt értékben, havi fizetésem kb. 4 eFt volt. Ösztönösen a középsőt vettem meg, pedig akkori szakértőm a legdrágábbat javasolta. Egy év múlva ő is vett magának egy sztereórádiót, méghozzá a legolcsóbbat. Mikor választása okát tudakoltam, azt válaszolta: „nem volt több pénzem". Rendben, de miért gondolta, hogy nekem lett volna.

6. A vállalati döntések c. fejezetben szintén elkerüljük a kalkulust és minimalizáljuk az ábrák számát. Új a növekedési ütem és az együttható logaritmikus összekapcsolása,

valamint a duopóliumos reakciódinamika tárgyalása.

7. A nemlineáris dinamikus rendszerekről szóló Stabilitás, ciklus és káosz c. fejezet tárgyával 1982-ben, a Magyar Tudományos Akadémián szervezett Téli Iskolán ismerkedtem meg, amelyen főleg matematikusok és fizikusok vettek részt, ahová Szász Domokos hívott el. Szerencsém volt, mert éppen egy kaotikus modellen dolgoztam, és a téli iskola hátszelét felhasználva, viszonylag korán publikáltam a káoszról. Később Cars Hommes és Helena Nusse segítségével mélyítettem el káoszelméleti ismereteim.

8. A jövedelemeloszlás, adómorál és adózás c. fejezetet Lackó Mária és Tóth István János az egykor az MTA-hoz tartozó KRTK Közgazdaság-tudományi Intézetében (KTI) folyó munkája ösztönözte. Az itt alkalmazott, korábban már publikált lineáris–kvadratikus hasznosságfüggvényt egy publikálatlan cikkből vettem. Egyik szerzője – „megsejtve", hogy éppen erre van szükségem –, egy nemzetközi konferencián ismeretlenül átadta cikktervezetük nyomtatott változatát, ahonnan már egyszerű volt a folytatás. Garay Barna–Tóth János, illetve Méder Zsombor–Vincze János társszerzőkkel írt cikkeink a jóval reálisabb logaritmikus hasznosságfüggvényre támaszkodtak, de ezek alkalmazása korlátozta a ceruza–papír alapú (számítógép nélküli) tárgyalást.

9. A népességdinamikai modellek c. fejezet korábbi változatát a Fazekas Mihály Gyakorló Gimnáziumban adtam elő 2015 körül. A dinamikai rész alapötlete egyszerű: ha 100 együtt élő évjárat helyett csak 2–3 együtt élő nemzedékre szorítkozunk, akkor a dinamikai elmélet a másodfokú egyenlettel tárgyalható.

10. Az elemi tb-nyugdíjmodellek c. fejezet korábbi változatát szintén a Fazekas Mihály Gyakorló Gimnáziumban adtam elő 2015 körül. 1992-ig azt sem tudtam, hogy eszik-e vagy isszák-e a nyugdíjrendszereket. Akkoriban keltette föl sokunk igazi érdeklődését a néhai Augusztinovics Mária (Guszti) a nyugdíjgazdaságtan iránt.

Számomra különösen kedves a fejezet végén szereplő Csebisev-féle (10.5. tételbeli) összegegyenlőtlenség, mert hozzá kapcsolódik életem első „matematikai-közgazdaságtani felfedezése". 1963-ban jelent meg Jánossy Ferenc „A gazdasági fejlettség mérése és mérésének új módszere". Tájékozott és gondoskodó szüleim megvették számomra a sok gondolatot ébresztő könyvet, és ott találkoztam egy állítással: egy gazdaság éves növekedési mutatója kétféleképp is mérhető, és az egyik módszer mindig nagyobb értéket ad, mint a másik. Az ok: általában azoknak a termékeknek a fogyasztása növekszik, amelyeknek az ára csökken vagy lassabban növekszik. Elég hamar felismertem, hogy az összegegyenlőtlenségből logikailag következik a növekedési indexek sorrendje. Középiskolás létemre viszonylag egyszerűen eljutottam Köves Pálhoz, aki az akkori Marx Károly Közgazdaság-tudományi Egyetemen volt a statisztika professzora. Figyelmesen meghallgatott, majd tankönyvében megmutatta, hogy az általam adott bizonyítás helyett a szakirodalom már régóta egy sokkal általánosabb, a korrelációs együtthatóra épülő bizonyítást alkalmaz. A könyvben bemutatott közgazdasági alkalmazás azonban remélhetőleg új.

11. Az önkéntes nyugdíjrendszer c. fejezet Király Balázzsal közös munkánk első lépése volt. Mindmáig nem tudok túllépni azon, hogy a témával foglalkozó hazai és nemzetközi szerzők zöme – nyíltan vagy titokban – figyelmen kívül hagyja, hogy az önkéntes megtakarítások támogatását az egész társadalom fizeti – adókból. Magyarul: a hangyákat a tücskök jutalmazzák, s ezt még tetézi, hogy a hangyák általában gazdagabbak is, mint a tücskök! Jelenleg egy magyar tücsök évi maximum 1,4 mFt-ot tehet be ilyen-olyan számlára úgy, hogy ezt az állam 20%-kal, maximum 280 eFt-tal egészítse ki. Miközben tízezrek tengődnek kevesebb, mint évi 280 eFt-ból! A Király–Simonovits (2016) cikkben azonban nem álltunk meg a statikus modellnél, sőt, a dinamikát az ún. ágensalapú modellek segítségével kiterjesztettük bonyolult tanuló rendszerekre.

12. A nyugdíjindexálás c. fejezet a mai magyar nyugdíjpolitika leglátványosabb, de ugyanakkor legveszélyesebb intézkedését modellezi. A reálbérek növekedését erőltetve, a régi és új nyugdíjak közti egyenlőtlenségek drámaian megnövekednek. Egyelőre az elemzés csak pusztába kiáltott szó. Minden gyakorlati érdeklődésű kutatónak szembe kell néznie azzal, hogy ötletei megvalósítását politikai érdekek keresztezhetik.

13. A jelzáloghitel elemi modelljei c. fejezetnek különösen hosszú (de számomra fontos) előtörténete van. 1978-ban belgiumi ösztöndíjasként hallgattam Franco Modigliani zseniális előadását a kettős indexálású jelzáloghitelekről. Igazi sztárközgazdászként erős felütéssel kezdte az előadását: „Az infláció társadalmi költségét akkor értettem meg igazán, amikor pár éve a fiam megházasodott." A naiv olvasó azt hihetné, hogy a később Nobel-díjjal is kitüntetett közgazdász arra célzott, hogy felmentek az árak, és a család nem tudta megengedni magának az esküvőt. Ez azonban tévedés, hiszen az árakkal együtt a bérek is emelkedtek. Az igazi ok: a gyors inflációt figyelmen kívül hagyva, a jelzáloghitelek folyóáron rögzített törlesztő részletei kifizethetetlenné váltak. Nálunk akkor még se infláció, se emelkedő kamatláb nem volt, csak mindent eláraszto hiány és fenntarthatatlan külső eladósodás. A tréfás bevezetés miatt mégis megjegyeztem a módszert!

1990 körül az infláció és a piaci kamatláb hazánkban már 30%-kal vágtatott, de a széltől is óvott hazai jelzálogadós még mindig 3%-os kamatot fizetett tartozása után. Ekkor jutott eszembe Modigliani fiának az esküvője, és az OTP-nek felajánlottam szolgálataim a kettős indexálású jelzáloghitellel – sikertelenül. Írtam azonban egy cikket a kérdésről, amely mintegy bevezetett a nyugdíjgazdaságtanba is (hiszen mindkét esetben hosszú távú és inflációtól megzavart folyamatokról van szó).

2004 és 2008 között hazánkban elszabadult a devizaalapú jelzáloghitelezés: először rossz pénzért (forint) jó pénzt (svájci frank) adtak a hitelezők, de aztán többszörösen visszavették az átmeneti ajándékot. Mint minden csoda, a devizaalapú hiteleké is csak három napig, bocsánat, pár évig tartott, majd jött az összeomlás. 2008 és 2015 között a svájci frank nominális árfolyama 140-ről 250-re (pár hónapig 300 forint fölé) ugrott. Egész idő alatt a tudatalattimban lapult a Modigliani-modell, de csak Király Júlia (az MNB egykori alelnöke) 2013-as KTI-s szemináriumi előadása csalta elő a mélyből. Az előadás után hazamentem, elkezdtem írni a közös cikk első változatát, amely évekkel később meg is jelent. Eső után köpönyeg, de még így is tanulságos.

14. Az általános egyensúlyelmélet legegyszerűbb modellje c. fejezetben a matematikailag nagyon bonyolult modell lényegét megpróbáltam középiskolás szinten megfogalmazni. A lényeg: megfelelő feltevések mellett a piac a lehető legjobban osztja el a termékeket a fogyasztók között. Számomra az mutatja Arrow Nobel-díjas közgazdász páratlan nagyságát, hogy miután 1954-ben Debreu-vel (szintén Nobel díjas) közösen nagyon általános feltevések mellett bebizonyította a klasszikus piaci egyensúly létezését és optimalitását, 1963-ban az amerikai egészségügy példáján megmutatta, hogy milyen bajt okoz a biztosítás önkéntessége. Ezt az árnyalt megközelítést másoljuk mi is.

15. Az együtt élő nemzedékek modellje c. fejezet Samuelson (a 20. század II. felét szintén meghatározó, Nobel-díjas közgazdászának) 1958-ból származó zseniális modelljét egyszerűsíti le. (Szerzője hírneve ellenére a nevezett modellt csak lassan ismerték el, de már évtizedek óta az egyik legfontosabb alapmodell.) Azáltal, hogy a szokással ellentétben nem tetszőleges vagy logaritmikus hasznosságfüggvényt, hanem az 5.1. példa Leontief-féle hasznosságfüggvényét tételezem fel, burkoltan Gusztit követem.

Életem során a racionális várakozásokat néhányszor felváltottam a sokkal reálisabb naiv várakozásokkal. Már a Modigliani-féle jelzáloghitelről szóló korábbi tanulmányomban (sőt, előtte is, a 7. pontban említett káoszmodellben) a gyakorlati bankárokat követve is alkalmaztam, [(13.16R)] helyett naiv várakozásokkal számoltam [(13.16N)].

Ugyancsak Guszti hatására nekiveselkedtem, hogy a két időszakos modellt általánosabb hasznosságfüggvények mellett n időszakosra általánosítsam. A feladatot Molnár Györggyel együtt megoldottuk (Molnár–Simonovits, 1996), de a várt hatás elmaradt: a két időszakos modell túl kényelmes volt ahhoz, hogy lemondjanak róla.

16. A valószínűség-számítási bevezetés c. fejezet megírása nagy kihívás volt, mert a fej-vagy-írás feladattól kellett pár oldalon eljutni a nagy számok gyenge törvényéig. Jellemző, hogy a mintaszerűen felépített Rényi (1968) egyetemi tankönyv szükségképpen csak a 300. o. körül kezdi el tárgyalni a valószínűség-számítás Csebisev-egyenlőtlenségét!

17. A biztosítási modellek és a szerencsejátékok alapmodelljei c. fejezetből a klasszikus biztosítás eléggé ismert. A kontraszelekciós irodalom érdekeltségi feltételes tárgyalását Eső Pétertől (egykor Rajk László Szakkollégium, Harvard Ph.D., most Oxford Egyetem) tanultam, amikor 2002-ben a rugalmas korhatár mechanizmustervezését tanulmányoztuk (Eső–Simonovits, 2003, lásd még Simonovits–Tóth, 2007 és a könyv 10.1. feladata). A szerencsejátékok tárgyalását Lovics Gábor javasolta.

18. A Regressziószámítás és korreláció c. fejezet fontos egyetemi tananyag, de mivel az alapegyenlet levezetése a parabola minimumhelyének meghatározására vezethető vissza, ezért bevettem a könyvbe. Remélem, hogy a köznapi példák segítenek a megértésben.

19. Sokáig elkerült a regresszió-számítás közgazdasági alkalmazása, de a fejlettséggel növekvő árszint és a szolgálati idővel csökkenő nyugdíjba vonulási kor paradoxona középiskolás szinten is tárgyalható. Pár éve, egy véletlen találkozás során Rudas Tamás egy liftben magyarázta el nekem e paradoxon hagyományos hátterét: Berkson-paradoxont. Elméleti modelljeimben hosszú éveken keresztül számoltam a „szolgálati idő = nyugdíjba vonulási kor − munkába lépési kor” képlettel (itt a 10. fejezetben), amikor Guszti és Köllő János munkásságán túl egy saját empirikus munka (Czeglédi–Simonovits–Szabó–Tir, 2016) rá nem döbbentett e feltevés irrealitására. A modellek folyamatos finomítása egyébként a kutatás természetes vonása.

A 20. fejezet a járvánnyal és gazdasági hatásaival foglalkozik. A Bevezetés koronvírusrészéhez kapcsolódva, a 20.1. alfejezet a legegyszerűbb járványmodellt mutatja be, Ozsvald Éva beszélt rá, hogy ezt a közvetlenül nem közgazdasági modellt is illesszem be a könyvembe. A 20.2. alfejezetben pedig a járvány okozta gazdasági válság egy-két elemét próbálom megmagyarázni, és az első hazai előrejelzéseket ismertetni.

Azzal a reménnyel indítottam útjára a könyvet, hogy lesznek, akik élvezettel és haszonnal forgatják. A könyv végére érve az Olvasó eldöntheti, hogy teljesült-e a reményem vagy sem.

22. Feladatmegoldások

2.1. feladat. Valóban, (2.3)-at behelyettesítve (2.4)-be:

$$x_t = A^t x_0 + \frac{1 - A^t}{1 - A} B.$$

Összevetve (2.2)-vel, adódik a jól ismert képlet.

2.2. feladat. Az egyensúly változatlan. Behelyettesítve $S(P_t) = a + bP_t$ és $D(p_t) = c - dP_t$ egyenletet az árigazodási egyenletbe és rendezve:

$$P_{t+1} = P_t + \kappa[c - a - (b + d)P_t] = \kappa[c - a] + [1 - \kappa(b + d)]P_t.$$

A 2.1. tétel szerint az igazodási sorozat aszimptotikusan stabil, ha

$$-1 < [1 - \kappa(b + d)] < 1, \qquad \text{azaz} \qquad 0 < \kappa < \frac{2}{b + d}.$$

2.3. feladat. Behelyettesítjük az $e_t = \varepsilon_0 + \varepsilon d_{t-1}$ visszacsatolást (2.22)-be:

$$d_t = \rho d_{t-1} - \varepsilon_0 - \varepsilon d_{t-1} = (\rho - \varepsilon)d_{t-1} - \varepsilon_0. \tag{2.22$'$}$$

Óvatos stabilizálást ad $\varepsilon = \rho - 0{,}99$.

3.1. feladat. Ha a kapus ugyanarra vetődik, mint amerre a lövő a büntetőt rúgja, akkor kivédi a lövést; ellenkező esetben nem.

3.2. feladat. Lásd 3.3. feladat megoldását.

3.3. feladat. *a)* A (H, H) pár nem egyensúly, mert hozama pl. az 1. számára –3, s ha egyoldalúan eltér tőle, azaz K-t választja, akkor hozama 0-ra növekszik. A (K, K) pár sem egyensúly, mert hozama pl. az 1. számára 1, s ha egyoldalúan eltér tőle, azaz H-t választja, akkor hozama 2-re növekszik. Viszont a (H, K) és a (K, H) pár mindegyike Nash-egyensúly. Pl. ha (K, H)-tól az 1. játékos eltérne, akkor hozama 0-ról –3-ra csökkenne; ha a 2. játékos térne el, akkor pedig annak hozama 2-ről 1-re esne.

b) Tegyük föl, hogy az 1. a Hajt stratégiát p, a Kitér stratégiát $1 - p$ valószínűséggel választja; a 2. pedig q, ill. $1-q$ valószínűséggel. Ekkor az 1. játékos hasznosságfüggvénye

$$u_1(p, q) = pq \cdot (-3) + p(1 - q) \cdot 2 + (1 - p)q \cdot 0 + (1 - p)(1 - q) \cdot 1 = p(1 - 4q) - q + 1.$$

Ha $q^* < 1/4$, akkor $p^* = 1$ az optimum; ha $q^* > 1/4$, akkor $p^* = 0$ az optimum – de ezeket már korábban kizártuk. Megmarad $q^* = 1/4$, ahol a haszon 0. Szimmetria miatt $p^* = 1/4$.

c) Csak akkor lesz a játék halálos, ha mindkét játékos egymástól függetlenül H-t játszik, ennek valószínűsége $p^* q^* = 1/16$. Az életben maradásé tehát 15/16.

d) $u_1(H,K) = 2$, $u_1(K,H) = 0$ és $16u_1(p^*,q^*) = -3+3\cdot 2+0+3\cdot 3\cdot 1$, azaz $u_1(p^*,q^*) = 12/16 = 3/4$.

3.4. feladat. Triviális. A kevert Nash-egyensúlyi stratégiapár $(1/3, 2/3)$, vö. 3.3. feladat.

3.5. feladat. A Jensen-egyenlőtlenség szerint

$$\alpha \log \frac{px}{\alpha} + (1-\alpha)\log\frac{qy}{1-\alpha} \le \log(px+qy) = \log m,$$

és egyenlőség csak $x' = y'$, azaz (3.4) esetén áll.

Viszont

$$\alpha \log \frac{px}{\alpha} + (1-\alpha)\log\frac{qy}{1-\alpha} = \alpha[\log x + \log p - \log\alpha] + (1-\alpha)[\log y + \log q - \log(1-\alpha)]$$

csak egy állandóval különbözik (3.7)-től.

4.1. feladat. Írjuk föl az egyenletet $t+1$-re, $x_{t+2} = x_{t+1} - x_t$, majd helyettesítsük be $x_{t+1} = x_t - x_{t-1}$-t: $x_{t+2} = -x_{t-1}$. Ismételve: $x_{t-1} = -x_{t-4}$, azaz $x_{t+2} = -x_{t-4}$.

4.2. feladat. *a)* A (4.5) levezetést általánosítva,

$$K_t = K_{t-1} + \psi sY_t + (1-\psi)sY_{t-1} = (1+\psi sA)K_{t-1} + (1-\psi)sAK_{t-2}. \qquad (4.5'')$$

Mivel $A_1 = 1+\psi sA$ és $A_2 = (1-\psi)sA$, ezért (2.8) szerint adódik $D^2 = A_1^2 + 4A_2 > 0$, majd $\lambda_{1,2}$.

b) Egyenletes növekedés esetén $K_t = GK_{t-1} = G^2K_{t-2}$. Behelyettesítve $(4.5')$-be, és $K_{t-2} \neq 0$-val egyszerűsítve, egy (2.8)-hoz hasonló egyenletet kapunk:

$$G^2 - (1+\psi sA)G - (1-\psi)sA = 0,$$

amelynek egy pozitív és egy negatív gyöke van. Közgazdaságilag csak az előbbi értelmes.

c) Esetünkben $-\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1 < 1$, tehát (4.5)-ben a $\xi_2\lambda_2^t$ tag relatíve elenyészik a $\xi_1\lambda_1^t$ taghoz képest.

d) Fölírhatnánk G-t a másodfokú egyenlet megoldóképlete segítségével is, és a $G(\psi)$ függvényt elemezhetnénk. De van ennél egy egyszerűbb megoldás, amely máskor is alkalmazható. Legyen

$$F(G,\psi) = G^2 - (1+\psi sA)G - (1-\psi)sA = G^2 - G - sa - sA(G-1)\psi$$

egy kétváltozós függvény, amelyet a $G \ge 1$ szakaszon vizsgálunk. $F(G,\cdot)$ növekvő, $F(\cdot,\psi)$ csökkenő, tehát $G(\psi)$ növekvő.

4.3. feladat. $A_2 \neq 0$ miatt $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 \neq 0$. Felírjuk az y_0-ból induló pályák egyenletét:

$$\hat{y}_t = \eta_1\lambda_1^t + \eta_2\lambda_2^t, \qquad (4.5')$$

ahol

$$\hat{y}_0 = \eta_1 + \eta_2 \qquad \text{és} \qquad \hat{y}_{-1} = \eta_1\lambda_1^{-1} + \eta_2\lambda_2^{-1}. \qquad (4.6')$$

Könnyen belátható, hogy ha $y_0 \approx x_0$ és $y_{-1} \approx x_{-1}$, akkor $\eta_1 \approx \xi_1$ és $\eta_2 \approx \xi_2$.

(4.5) szerint a pálya csak akkor korlátos, ha $|\lambda_1|, |\lambda_2| \le 1$. Ekkor közeli indulóállapotok esetén az

$$x_t - y_t = (\xi_1 - \eta_1)\lambda_1^t + (\xi_1 - \eta_2)\lambda_2^t$$

aszimptotikusan is kicsiny marad.

Külön bizonyítást igényelne a negatív diszkrimináns esete, ezt az Olvasóra bízzuk.

5.1. feladat. Legyen p a hűtőszekrény ára, akkor a kritikus vevő jövedelme $p = a + bw_p$, azaz $w_p = (p-a)/b$, $p > a$. Behelyettesítve w_p-t az

$$F(w) = \frac{w - w_{\mathrm{m}}}{1 - w_{\mathrm{m}}}$$

egyenletbe, a $D(p)$ függvény segítségével adódik

$$D(p) = 1 - \frac{(p-a)/b + w_{\mathrm{m}}}{1 - w_{\mathrm{m}}}.$$

5.2. feladat. A súlyozott számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazva a $p_i x_i/\alpha_i$ számokra:

$$\left(\frac{p_1 x_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{p_n x_n}{\alpha_n}\right)^{\alpha_1} \le \alpha_1 \frac{p_1 x_1}{\alpha_1} + \cdots + \alpha_n \frac{p_n x_n}{\alpha_n} = p_1 x_1 + \cdots p_n x_n = 1.$$

A bal oldalon $(p_1/\alpha_1)^{\alpha_1} \cdots (p_n/\alpha_n)^{\alpha_n}$ állandó kiemelhető, tehát a maximumhely változatlan. A bal oldal maximuma a tényezők egyenlősége esetén valósul meg: $p_1 x_1/\alpha_1 = \cdots = p_n x_n/\alpha_n = c$, azaz $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ miatt $c = 1$, tehát

$$x_1^{\mathrm{o}} = \frac{\alpha_1}{p_1}, \qquad \ldots, \qquad x_n^{\mathrm{o}} = \frac{\alpha_n}{p_n}.$$

5.3. feladat. Behelyettesítéssel.

6.1. feladat. Helyettesítsük be (6.3)-ba (6.2)-t.

6.2. feladat. Itt nincs helyettesítés K és L között: $K(Q) = Q/a$ és $L(Q) = Q/b$, azaz

$$C(Q) = rK(Q) + wL(Q) = \left(\frac{r}{a} + \frac{w}{b}\right) Q.$$

6.3. feladat. Ekkor $K = Q^3/L^2$, azaz $c(L) = rQ^3/L^2 + wL$. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség alkalmazhatóságához két egyenlő tagra kell bontani a lineáris részt:

$$\frac{rQ^3}{L^2} + \frac{wL}{2} + \frac{wL}{2} \ge 3Q\sqrt[3]{rw^2/4},$$

és a két oldal egyenlősége éppen az első két tag egyenlősége esetén valósul meg:

$$\frac{rQ^3}{L^2} = \frac{wL}{2},$$

azaz igaz a feladat 1. állítása. A 2. állítást helyettesítéssel nyerjük:

$$K(Q, L) = Q^3 L^{-2} = Q\sqrt[3]{\frac{w^2}{4r^2}}.$$

6.4. feladat. Írjuk be (6.18)-ba a két költségegyütthatót:

$$Q_1(Q_2) = \frac{a - c_1 - bQ_2}{2b} \qquad \text{és} \qquad Q_2(Q_1) = \frac{a - c_2 - bQ_1}{2b}.$$

Eltávolítjuk a nevezőket:

$$2bQ_1 = a - c_1 - bQ_2 \qquad \text{és} \qquad 2bQ_2 = a - c_2 - bQ_1.$$

2-vel beszorozva az 1. egyenletet és abba behelyettesítve a 2.-at:

$$4bQ_1 = 2a - 2c_1 - 2bQ_2 = 2a - 2c_1 - (a - c_2 - bQ_1).$$

Rendezve

$$Q_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b} \qquad \text{és} \qquad Q_2^* = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}$$

Látható, hogy ha $c_1 > c_2$, akkor $Q_1^* < Q_2^*$.

6.5. feladat. (6.17) homogenizált alakja,

$$\hat{Q}_{1,t+1} = \frac{-\hat{Q}_{2,t}}{2} \qquad \text{és} \qquad \hat{Q}_{2,t} = \frac{-\hat{Q}_{1,t-1}}{2}$$

alapján

$$\hat{Q}_{1,t+1} = \frac{\hat{Q}_{1,t-1}}{4},$$

s ez egy 0-hoz tartó mértani sorozat $t = 0, 2, 4, \ldots$-ra és $t = 1, 3, 5, \ldots$-ra.

6.6. feladat. Vegyük a (6.19′) differenciaegyenlet-rendszer homogén részét; és felhasználva, hogy $\sum_{i=1}^{n} Q_{-i,t} = (n-1)Q_t$, összegezzük az n darab egyenletet:

$$\hat{Q}_{t+1} = \frac{-(n-1)\hat{Q}_t}{2}, \quad t = 1, 2, \ldots.$$

Már $n = 3$ esetén is 2-ciklust kapunk: $\hat{Q}_{t+1} = -\hat{Q}_t$. További vizsgálat tárgya, hogy miképp viselkednek az egyes vállalatok kibocsátásai; $n > 3$-nál divergálnak.

7.1. feladat. Egyszerű számolással igazolható, hogy a (7.8) jobb oldalán álló $f(x)$ függvény fix pontja $\sqrt{2}$:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right), \qquad \text{azaz} \qquad x^2 = 2.$$

Továbbá igazoljuk, hogy az $f(x)$ függvény $x > \sqrt{2}$ esetén növekvő:

$$x + \frac{2}{x} > y + \frac{2}{y}, \qquad \text{ha} \qquad x > y > \sqrt{2}.$$

Rendezve:

$$x^2y + 2y > xy^2 + 2x, \qquad \text{azaz} \qquad xy(x-y) > 2(x-y).$$

$x > y > \sqrt{2}$ miatt ez igaz, tehát $\sqrt{2} < x_{t+1} < x_t$ stb.

7.2. feladat. 2-ciklus: Szimmetria miatt feltehető, hogy $x_1 < 1/2 < x_2$. Definíció szerint $x_2 = 2x_1$ és $x_1 = 2 - 2x_2$. Behelyettesítve x_2-t x_1-be: $x_1 = 2 - 4x_1$, rendezve: $x_1 = 2/5$ és $x_2 = 4/5$.

8.1. feladat. *a)* $w_{\mathrm{m}} = 0$ esetén a (8.10) képlet (8.5)-re egyszerűsödik.

b) Egyszerű átalakítással

$$\theta^* = 1 - \frac{1}{2 - w_{\mathrm{m}}},$$

amely a minimálbérnek nyilvánvalóan csökkenő függvénye.

8.2. feladat. *a)* Egyszerű számolással (8.14) szerint

$$W(\theta) = 2(f_\mathrm{m}c_\mathrm{m} + f_\mathrm{M}c_\mathrm{M}) - \mu(f_\mathrm{m}w_\mathrm{m}^{-1}e_\mathrm{m}^2 + f_\mathrm{M}w_\mathrm{M}^{-1}e_\mathrm{M}^2).$$

Az újraelosztás miatt $f_\mathrm{m}c_\mathrm{m} + f_\mathrm{M}c_\mathrm{M} = f_\mathrm{m}w_\mathrm{m} + f_\mathrm{M}w_\mathrm{M} = 1$, és emiatt bármilyen $\theta > 0$ esetén $W(\theta) < W(0)$.

b) Ha $U(c, e)$ az 1. változóban is szigorúan konkáv függvény lenne, például $U(c, e) = \log c - \mu e^2$, akkor a módosításban is $\theta^* > 0$ állna.

9.1. feladat. Újraszámolva,

9.6. táblázat. Stilizált kínai népességdinamika – mérsékelt változat

Negyedszázad	Féltermékenység	Gyermekek létszáma	Szülők létszáma	Nagyszülők létszáma	Összesen létszáma	Teljes fh.
t	φ_t	K_t	M_t	P_t	N_t	d_t
1950-	2	4	2	1	7	2,5
1975-	1	4	4	2	10	1,5
2000-	1	4	4	4	12	2,0

Látható, hogy a mérsékelt változat esetén a 8 egységnyi népességcsúcs a 2000–2024-es időszakra 12 egységre nőtt volna, és ott stabilizálódott volna.

9.2. feladat. Már beláttuk, hogy a ν növekedési együttható másodfokú egyenletünk nagyobbik gyöke:

$$\nu(\varphi_1) = \frac{\varphi + \sqrt{\varphi_1^2 + 4(\varphi - \varphi_1)}}{2}.$$

A $\nu(\varphi)$ deriválásával közvetlenül belátható lenne állításunk, de elemi meggondolás is segít. Vegyünk egy csökkenő stabil népességet. Ebben a modellben a korosztályok létszáma időben monoton csökken. A fiatal szülők létszáma kisebb, mint az időseké, tehát súlyuk csökkenése lassítja a népességszám csökkenési ütemét.

10.2. feladat. *a)* (10.13′) értelmében

$$z^\mathrm{N}(D, R) = \tau u R - \frac{\tau u R}{\mathbf{E}D - R}(D - R) = \tau u \frac{\mathbf{E}D - D}{\mathbf{E}D - R} = b(R)(\mathbf{E}D - D).$$

b) Definíció szerint

$$\mathbf{E}z^\mathrm{N} = f_1 b(R_1)(\mathbf{E}D - D_1) + f_2 b(R_2)(\mathbf{E}D - D_2).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$b^\mathrm{N}(R_1) < b^\mathrm{N}(R_2) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{E}D - D_2 < 0 < \mathbf{E}D - D_1,$$

ezért $\mathbf{E}z^\mathrm{N}$ első tagját felülbecsüljük, ha $b^\mathrm{N}(R_1)$ helyett $b^\mathrm{N}(R_2)$-t írunk, és azt kiemeljük:

$$\mathbf{E}z^\mathrm{N} < b^\mathrm{N}(R_2)[f_1(\mathbf{E}D - D_1) + f_2(\mathbf{E}D - D_2)].$$

A várható érték definíciója szerint a [ ]-ben 0 áll, tehát $\mathbf{E}z^\mathrm{N} < 0$.

10.3. feladat. *a)* Behelyettesítve (10.14A)-t (10.13)-be, az új egyenleg

$$z^{\mathrm{A}}(u,R) = b^{\mathrm{N}}(1,R)u[e - \gamma e(u)].$$

Várható értéket veszünk és 0-val egyenlővé tesszük az eredményt:

$$0 = \mathbf{E}z^{\mathrm{A}}(u,R) = b^{\mathrm{N}}(1,R)\mathbf{E}\{u[e - \gamma e(u)]\},$$

innen (10.16A).

Figyeljük meg, hogy $e(u)$ növekszik, és a Csebisev-összegegyenlőtlenség miatt $\mathbf{E}[ue(u)] > e$, azaz $\gamma^{\mathrm{A}} < 1$.

b) $\gamma^{\mathrm{A}} = 0{,}975$ – elhanyagolhatóan kicsi korrekció – valószínűleg a valóságban nagyobb az élettartamok szóródása.

10.4. feladat. A maximalizáláskor az 500-as oszlopból veszek ki 1-et, ... és a 20 000-es oszlopból 6-ot. (A minimalizáláskor fordítva.)

11.1. feladat. $\eta = 2$-re (11.5) szerint $\theta^{\mathrm{o}} = 1/6 = s^{\mathrm{o}}$, $\bar{\tau} = 1/3$ és $1/6 + 1/6 = 1/3$.

11.2. feladat. Hasonlítsuk össze (11.5)-öt és (11.12)-t! Mivel $0 < \chi < 1$ és $0 < f_{\mathrm{H}} < 1$, (11.12) jobb oldala kisebb, mint (11.5)-é.

11.3. feladat. (11.17) szerint $\psi_1 = f_{\mathrm{H}}(1+\alpha)(1+\beta)$, azaz (11.16) szerint

$$s_{\mathrm{H}}^{\mathrm{o}} = \frac{f_{\mathrm{H}}\chi}{\psi_1} \qquad \text{és} \qquad s_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}} = \frac{f_{\mathrm{H}}\chi}{\psi_1}.$$

12.3. feladat.

$$B_t = \sum_{k=0}^{T-1} b_{k,t} = \beta v_t G^{-1} + \sum_{k=1}^{T-1} \beta v_t G^{-k-1} G^{\iota k}.$$

Alkalmazva a mértani sorozat összegképletét:

$$B_t = \beta v_t G^{-1} \frac{1 - G^{(\iota-1)T}}{1 - G^{\iota-1}}, \qquad \iota < 1.$$

12.4. feladat. A 12.3. feladat alapján könnyen elkészíthető a

12.7. táblázat. Az általános helyettesítési arány függése a bérnövekedés ütemétől: ár–bér-indexálás

Reálbér-növekedési ütem $100(G-1)$	0	1	2	3	4	5
Átlagos helyettesítési arány γ	0,800	0,763	0,729	0,698	0,668	0,641

13.1. feladat. Vezessük be az $S_T = R^{-1} + \cdots + R^{-T}$ jelölést! Ekkor a feladat állítása (13.3) szerint

$$\frac{T}{S_T} < \frac{T+1}{S_{T+1}}.$$

Felhasználva, hogy $S_{T+1} = S_T + R^{-T-1}$ és eltüntetve a nevezőket:

$$TS_T + TR^{-T-1} < (T+1)S_T, \qquad \text{azaz} \qquad TR^{-T-1} < S_T.$$

Tagonkénti összehasonlítással igaz az utolsó egyenlőtlenség, ezért megfordítva az ekvivalens átalakításokat, igazoltuk a feladat állítását.

13.2. feladat. *a)* Az egyszerűség kedvéért csak $D_1 < D_0$-t igazoljuk. (13.3) értelmében $B(\infty) < B(T)$, és (13.1)-et felhasználva, adódik

$$D_1 = RD_0 - B(T) < RD_0 - B(\infty) = D_0.$$

b) (13.9) értelmében a kettős indexálású hitelnél $B(\infty) < b(T)$ pontosan akkor teljesül, ha

$$(pr-1)D_0 < \frac{(r-1)D_0}{1-r^{-T}}$$

áll. Rendezéssel adódik a 13.2 feladat b) feltétele.

14.1. feladat. Felírjuk (14.3)-at mindkét fogyasztóra:

$$px_1 + y_1 = pv_1 + w_1, \tag{14.3 − 1}$$

$$px_2 + y_2 = pv_2 + w_2. \tag{14.3 − 2}$$

Összeadva őket, és figyelembe véve (14.1)–(14.2)-t: $p + 1 = p + 1$ azonosságot kapjuk, tehát megfordítva az átalakítás sorrendjét, (14.3-1)-ből következik (14.3-2).

14.2. feladat. *a)* H részvevő esetén a mérlegegyenletek

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_H = 1 \qquad \text{és} \qquad w_1 + w_2 + \cdots + w_H = 1, \tag{14.1H}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_H = 1 \qquad \text{és} \qquad y_1 + y_2 + \cdots + y_H = 1. \tag{14.2H}$$

(14.3)–(14.5) változatlan, csak h 2 helyett H-ig fut.

$$p^* = \frac{w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + \cdots + w_H\alpha_H}{1 - v_1\alpha_1 - v_2\alpha_2 - \cdots - v_H\alpha_H}. \tag{14.6H}$$

b) Betűhiány miatt a fogyasztók mellett a termékeket is indexeljük. Legyen $p_1, \ldots, p_n$ az $i = 1, \ldots, n$-edik termék ára, $v_{i,h}$ a h-adik fogyasztó kezdőkészlete, és $x_{i,h}$ a végső fogyasztása. Ekkor

$$v_{1,h} + v_{2,h} + \cdots + v_{n,h} = 1, \qquad h = 1, 2. \tag{14.1n}$$

$$x_{1,h} + x_{2,h} + \cdots + x_{n,h} = 1, \qquad h = 1, 2. \tag{14.2n}$$

$$p_1x_{1,k} + \cdots + p_nx_{m,k} = p_1v_{1,k} + \cdots + p_nv_{n,h}, \qquad h = 1, 2. \tag{14.3n}$$

$$u_h(x_{1,h}, \ldots, x_{n,h}) = \alpha_{1,h}\log x_{1,h} + \cdots + \alpha_{n,h}\log x_{n,h} \to \max., \quad h = 1, 2, \tag{14.4n}$$

ahol $\alpha_{i,h}$ ($0 < \alpha_{i,h} < 1$) mutatja az i-edik termék relatív fontosságát a h-adik fogyasztó számára: $\sum_{i=1}^n \alpha_{i,h} = 1$. Viszonylag könnyen belátható, hogy n termék esetére a parametrikus optimum

$$x_{i,h}(p_1, \ldots, p_n) = \frac{\alpha_{1,h}p_1v_{1,h} + \cdots + \alpha_{m,h}p_nv_{n,h}}{p_i}, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad h = 1, 2. \tag{14.5n}$$

Behelyettesítve (14.5n)-et (14.1n)-be:

$$\sum_{h=1}^{2} \frac{\alpha_{1,h}p_1v_{1,h} + \cdots + \alpha_{n,h}p_nv_{n,h}}{p_i} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Rendezve

$$p_i = (\alpha_{1,1}v_{1,1} + \alpha_{1,2}v_{1,2})p_1 + \cdots + (\alpha_{n,1}v_{n,1} + \alpha_{n,2}v_{n,2})p_n, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Most egy n lineáris egyenletből álló, n-ismeretlenes egyenletrendszert kellene megoldanunk, és pozitív árakat kellene kapnunk, s ez magasabb matematikát igényelne.

c) A szimmetrikus esetben: $\alpha_{i,h} \equiv 1/n$ azonban valóban szimmetrikus a megoldás is:

$$p_i = \frac{1}{n}(p_1 + \cdots + p_n), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ennek lényegében egyetlenegy megoldása van: $p_1^* = \cdots = p_n^* = 1$. Visszahelyettesítve (14.5n)-be, az optimális fogyasztás minden termékből azonos, és az egyéni kezdőkészletek összegével arányos:

$$x_{i,h}(1, \ldots, 1) = \frac{v_{1,h} + \cdots + v_{n,h}}{n}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad h = 1, 2.$$

15.1. feladat. Táblázatos alakban

15.1. táblázat. Kamategyüttható-dinamika – racionális várakozás

	Alsó	Felső
Időszakok	kamattényező-pálya	
t	$R(1)$	$R(2)$
0	1,000	3,000
1	3,000	1,667
2	1,667	2,200
3	2,200	1,909
4	1,909	2,048
5	2,048	1,977
6	1,977	2,012
7	2,012	1,994
8	1,994	2,003
9	2,003	1,999

15.2. feladat. Táblázatos alakban

15.2. táblázat. Kamategyüttható-dinamika – naiv várakozás (növekvő népesség)

	Alsó	Felső
Időszakok	Kamattényező-pálya	
t	$R(1)$	$R(2)$
–1	1,000	3,000
0	1,562	2,372
1	1,818	2,145
2	1,926	2,057
3	1,970	2,023
4	1,988	2,009
5	1,995	2,004
6	1,998	2,001
7	1,999	2,001
8	2,000	2,000

Megjegyzés. $\nu = 2$

15.3. feladat. Táblázatos alakban

15.3. táblázat. Kamategyüttható-dinamika – naiv várakozás (csökkenő népesség)

	Alsó	Felső
Időszakok	Kamattényező-pálya	
t	$R(1)$	$R(2)$
–1	1,000	0,333
0	0,618	0,457
1	0,529	0,489
2	0,507	0,497
3	0,502	0,499
4	0,500	0,500

Megjegyzés. $\nu = 0{,}5$

16.1. feladat. Elvégezve a négyzetre emelést (16.4′)-ban:

$$\mathbf{D}^2X = \sum_{i=1}^{n} p_i[x_i^2 - 2x_i\mathbf{E}X + (\mathbf{E}X)^2] = \mathbf{E}X^2 - 2\mathbf{E}X\mathbf{E}X + (\mathbf{E}X)^2.$$

Összevonással adódik (16.4″).

16.2. feladat. A 16.3. tétel szerint teljes indukcióval $\mathbf{E}S_n = n\mathbf{E}X_1 = np$. A 16.4. tétel szerint $\mathbf{D}^2S_n = n\mathbf{D}^2X_1 = npq$.

16.3. feladat. *a)* Vegyük figyelembe az $q_t = 1 - p_t$ korlátozást. Ekkor elegendő az 1. állapot valószínűségváltozását vizsgálni!

$$p_{t+1} = \alpha p_t + (1-\beta)(1-p_t) = (\alpha - 1 + \beta)p_t + 1 - \beta.$$

Stacionárius esetben

$$p^* = (\alpha - 1 + \beta)x^* + 1 - \beta,$$

azaz

$$p^* = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} \qquad \text{és} \qquad q^* = 1 - x^* = \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}.$$

b) Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat, ekkor $1-\beta$ kiesik:

$$p_{t+1} - p^* = (\alpha - 1 + \beta)(p_t - p^*).$$

Ez a sorozat nullához tart, mert $|\alpha + \beta - 1| < 1$.

17.1. feladat. Nincs kockázat. Van kockázat, de közömbös.

17.2. feladat. Mert a kár relatív szórása kicsiny.

17.3. feladat. Mivel itt a „nagy” kockázat alkalmanként kisebb, mint máskor a „kis” kockázat, inkább nagyobb és kisebb kockázatról beszélünk.

17.6. táblázat. Optimális önrészesedés változó kockázatok esetén

Nagyobb kockázat p_2 / Kisebb kockázat p_1	0,3	0,4	0,5	0,6
0,2	0,341	0,384	0,409	0,429
0,3		0,330	0,381	0,412
0,4			0,326	0,384
0,5				0,329

17.4. feladat. Általánosabb képletet igazolunk:

$$1 + 2q + \cdots + nq^n + \cdots = \frac{q}{(1-q)^2}, \qquad |q| < 1. \tag{$*$}$$

Szükségünk lesz a végtelen mértani sor összegképletének következő alakjára:

$$q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{n+m} + \cdots = \frac{q^n}{1-q}, \qquad |q| < 1. \tag{$**$}$$

Induljunk ki abból, hogy $nq^n = q^n + \cdots + q^n$ (n-szer). Ha (*) bal oldalán szereplő tagokat összegenként vesszük, és felcseréljük a sorrendet, nem soronként, hanem oszloponként adjuk össze, akkor az n-edik oszlopban (**) értelmében $q^n/(1-q)$ áll, amelyet n szerint összegezve (*)-ot kapjuk. $q = 1/2$-re adódik 2.

18.1. feladat. Helyettesítsük be $\hat{Y} = \beta\hat{X}$ egyenletbe az eltérésváltozók definícióját:

$$Y - \mathbf{E}Y = \beta(X - \mathbf{E}X), \qquad \text{azaz} \qquad Y = \mathbf{E}Y - \beta\mathbf{E}X + \beta X.$$

18.2. feladat. Indirekt: $\mathbf{E}F > \alpha + \beta f_1$-ből kivonva $\mathbf{E}F = \alpha + \beta\mathbf{E}F$-t, $0 > \beta(f_1 - \mathbf{E}F)$ – ellentmondás.

19.1. feladat. *a)* Heurisztikusan érvelve: azért negatív a korreláció, mert az (X, Y) síkban ÉNY–DK-i a regressziós egyenes meredeksége.

b) Várható értékek: $\mathbf{E}X = p + 1 - p - q = 1 - q$ és $\mathbf{E}Y = q + 1 - p - q = 1 - p$. Szorzat várható értéke: $\mathbf{E}(XY) = 1 - p - q$.

Szórások binomiális eloszlásra:

$$\mathbf{D}X = \sqrt{q(1-p-q)} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{D}Y = \sqrt{p(1-p-q)}.$$

Korrelációs együttható:

$$r(X,Y) = \frac{\mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)}{\mathbf{D}X\mathbf{D}Y} = \frac{1 - p - q - (1-q)(1-p)}{\sqrt{q(1-p-q)}\sqrt{p(1-p-q)}}.$$

Rendezve

$$r(X,Y) = \frac{-\sqrt{pq}}{1-p-q}.$$

c) $p = q < 1/2$ esetén

$$r(X,Y) = \frac{-p}{1-2p}.$$

d) $p = 1/4$ esetén

$$r(X,Y) = \frac{-1/4}{1/2} = -\frac{1}{2}.$$

23. Fogalomtár [első előfordulás]

Adó az a pénzmennyiség, amelyet az állam az állampolgártól meghatározott szabályok szerint évente beszed. [8.1]

Adókulcs az adó mértéke, amely az adóköteles jövedelem/vásárlás/vagyon függvényében meghatározza a jövedelem/áfa/vagyon-adót. [8.1]

Adómorál egy rejtett paraméter, amelynek értékétől függően az állampolgár az adóköteles jövedelme valamekkora részét – ellenőrzés nélkül is – bevallja. [8.2]

Adósság (tartozás) a felvett hitelből a törlesztés után maradó rész. [13.1]

Alapmegoldások, amelyeknek lineáris kombinációjából előáll az általános megoldás. [4.1]

Amplitúdó az oszcilláció maximuma. [4.2]

Államadósság az állam adóssága, amely a korábbi állami bevételek és az állami kiadások különbségének kamatos kamattal számított összege. [2.4]

Állandó áras érték a folyóáras érték osztva a megfelelő árindexszel. [12.1]

Állapot a dinamikus rendszer pillanatnyi helyzetét írja le. [2.1]

Állapotegyenlet a dinamikus rendszer időben változó helyzetét írja le. [2.1]

Általános egyensúly olyan helyzet, amikor több áru és több részvevő optimális kereslete és kínálata egyensúlyban van. [14.1]

Általános nyugdíjkorhatár az az életkor, amikor a megfelelő évjárat tagjai levonás nélkül nyugdíjba vonulhatnak. [19.2]

Árindexált nyugdíj évről évre az infláció mértékében emelkedik. [12.3]

Ár- és bérindexált nyugdíj évről évre az infláció és a bérnövekedés átlagos mértékében emelkedik. [12.4]

Árszint (fogyasztói) megmutatja, hogy egy adott évhez képest hányszor több pénzre van szükség a rögzített fogyasztói kosár megvásárlásához. [12.1]

Aszimmetrikus információ esetén az eladó vagy a vevő többet tud magáról, mint a másik. (Például az életjáradékot vevő ismeri szülei/nagyszülei tényleges halálozási életkorát, a biztosító nem ismeri.) [17.2]

Autonóm beruházás a beruházásnak a gazdaság helyzetétől független része. [4.4]

Autonóm fogyasztás a fogyasztásnak a gazdaság helyzetétől független része. [4.4]

Bérindexált nyugdíj évről évre az országos átlagbérek mértékében emelkedik. [12.2]

Berkson-paradoxon: két eredetileg független valószínűségi változó a szűrés után negatívan vagy pozitívan korrelálttá válik. [19.2]

Beruházás a kibocsátás fogyasztás feletti része, amelyet a gazdaságban a termelés eredményéből a tőke bővítésére fordítanak. [2.2]

Beruházási akcelerátor, gyorsító az az állandó, amely a termelés növekedésének függvényében kiegészíti a beruházás autonóm részét. [4.4]

Binomiális eloszlás k-adik tagja annak a valószínűsége, hogy n kísérletből éppen k sikerül. [16.2]

Biztosító kártérítést fizet a biztosított tárgyat ért kárért. [17.1]

Célfüggvény olyan függvény, amelyet az egyén maximalizálni/minimalizálni próbál. [3.3]

Ciklus – egy teljes visszatérési szakasz alatti pálya. [4.2]

Devizaalapú jelzáloghitelnél a törlesztőrészlet forintértékét egy párhuzamos, elvben devizában fennálló jelzáloghitel törlesztőrészletének egyenértékeként számítják ki. [13.3]

Devizaárfolyam az a szám, amely megmondja, hogy például 1 euróért hány forintot kell fizetni. (2019. január 15-én 1 euró = 321 Ft volt.) Minél nagyobb a szám, annál gyengébb a forint, [13.3]

Differenciaegyenlet olyan egyenletsorozat, amelynek a bal oldalán álló változó a jobb oldalán álló korábbi időszak változóitól függ. [2.1]

Dinamikus rendszerben a rendszer állapotát egy vagy több korábbi állapot határozza meg. [2.1]

Diszkrét idejű (szakaszos) dinamikus rendszerben az állapot lépésről lépésre változik (ellentéte a folytonos idejű). [2.1]

Dollárárverés olyan árverés, amelyben nemcsak a nyertesnek, de a vesztesnek is ki kell fizetnie az utolsó ajánlatát – irracionális. [3.2]

Domináns stratégia az ellenfél bármely lépése esetén jobb, mint más (ilyen a fogolydilemmában a köpés). [3.1]

Duopólium két termelő versengése a fogyasztókért. [6.4]

Egyensúlyi helyzetben a dinamikus rendszer nyugalomban van. [2.1]

Együtt élő nemzedékek modelljében negyedszázadonként kilép az idős nemzedék, a fiatal idős lesz, és belép egy fiatal nemzedék. [15.1]

Életjáradék egy meghatározott kortól az egyén élete végéig járó, általában értéktartó jövedelemáram. [10.1]

Életpálya-járulék/járadék/egyenleg az egész életpályára vonatkozó járulék /járadék/egyenleg. [10.2]

Előrelátó dolgozók optimális mértékben gondoskodnak a jövőjükről. [11.1]

Elsőrendű differenciaegyenlet esetén a jövő állapot csak a jelen állapottól függ. [2.1]

Életciklusmodell a megtakarítást, azaz a fogyasztás és a jövedelem különbségét az életkor figyelembevételével írja le. (Tipikusan kisimítja a fogyasztási pályát.) [5.3]

Előrejelezhető egy determinisztikus dinamikus pálya, ha a kezdőérték kismértékű változása csak kis mértékben változtatja meg a pályát. [7.2]

Elsődleges egyenleg az állami költségvetés kamatkiadás nélküli egyenlege. [2.3]

Első legjobb megoldás a megengedettségi feltételek mellett maximalizálja a társadalmi jólétet – teljes információt feltételezve. [17.3]

Érmepárosítás nevű 2-személyes, 0-összegű szimmetrikus játékban, ha a két játékos ugyanazt lépi, akkor az 1. játékos nyer, ellenkező esetben a 2. (A Nash-egyensúly 50-50%-os randomizálás.) [3.1]

Érdekeltségi feltétel kiköti, hogy a kormányzat által ajánlott menüből az egyes típusoknak érdemes a nekik szántat kiválasztaniuk. (Például rugalmas nyugdíjkorhatár esetén a hosszabb várható élettartamú dolgozónak nem érdemes rövidebb várható élettartamúnak tettetnie magát, mert annyival kisebb éves nyugdíjat kap, hogy a korábbi nyugdíjba vonulás ellenére is veszít.) [17.3]

Eszmei számla egy olyan felosztó-kirovó nyugdíjrendszer, amelyben az életpálya alatt befizetett járulékok egy eszmei (képzeletbeli) számlán kamatoznak, és az éves nyugdíj a nyugdíjazáskori eszmei tőke és a hátralévő várható élettartam hányadosa. [10.2]

Exponenciális leszámítolás esetén az egymás utáni időszakok leszámítolási mértéke azonos. [5.3]

Fázisszög, a másodrendű differenciaegyenlet megoldásának kezdőszöge [4.2]

Fedezetlen kamatparitás az a helyzet, amikor a hazai pénz leértékelési üteme a kitüntetett devizához (nálunk a svájci frankhoz) képest közelítőleg megegyezik a kamatlábkülönbséggel. (Pontosabb megfogalmazás a megfelelő együtthatók egyenlőségét mondja ki.) [13.3]

Felosztó–kirovó nyugdíjrendszerben minden nemzedék az előző nemzedéknek takarékoskodik (ellentéte a tőkésített rendszer). [10.1]

Fibonacci-sorozat, amelynek bármelyik tagja az előző két tag összege. [4.2]

Fix pont az adott leképezésnél helyben marad. [2.1]

Fizetési mérleg egyenlege az export és az import különbsége. [2.3]

Fogolydilemma lép fel, amikor az önzés a domináns stratégia, de az összefogás lenne a játékosok közös érdeke. [3.1]

Fogyasztás a kibocsátás beruházás fölötti része: élelem, ruha, lakás, stb. [5.1]

Fogyasztási határhajlandóság a fogyasztás változó részének és a jövedelemnek a hányadosa. [4.4]

Folyóáras változó számításakor nem vesszük figyelembe, hogy két időszak közben a pénz vásárlóértéke változik, általában gyengül. [12.1]

Független események együttes előfordulási valószínűsége a két esemény valószínűségének szorzata. [16.1]

Függőségi hányados (időskori/fiatalkori) a nyugdíjasok/gyermekek és a dolgozók létszámának a hányadosa. [10.1]

Gyáva nyúl szimmetrikus nem 0-összegű játék: kitérés – lebőgés, hajtás – halál. [3.1]

Hasznosság a fogyasztó számára a fogyasztással szerzett szubjektív öröm. [5.2]

Hasznosságfüggvény a hasznosság függése a fogyasztástól. [5.2]

Haszon a bevétel és a kiadás különbsége (profit). (Nem egyenlő a fogyasztó hasznosságával) [17.1]

Határciklusra minden, a ciklushoz közeli állapotból induló pálya aszimptotikusan rátekeredik. [7.3.]

Helyettesítés a munka és a tőke között, míg a kibocsátás állandó. [6.2]

Helyettesítési arány/hányados az átlagos nyugdíj és az átlagos kereset aránya/hányadosa. [10.1]

Helyettesítési hatás: az áremelkedés csökkenti a többi termék iránti keresletet. [21.2]

Hiperbolikus leszámítolás a hagyományos leszámítolással ellentétben külön leszámítolja az összes jövőbeli fogyasztás hasznosságát. (Például emiatt a fogyókúra kezdetét mindig másnapra toljuk.) [5.4]

Hosszmetszeti pálya az egyén születésétől a halálozásáig tartó (kereseti/fogyasztási) pályája. [15.1]

Hüvelykujjszabály egy viszonylag egyszerű válasz egy bonyolult kérdésre. (Például nettó jövedelmed 30%-át költsd élelemre.) [5.2]

Inflációs ráta az éves fogyasztói árszint százalékos emelkedése. [12.1]

Járulék, amit a dolgozó és a munkáltató fizet későbbi nyugdíj és egészségügyi ellátás biztosítására. [10.1]

Járulékkulcs a járulék és a kereset hányadosa. [10.1]

Járvány egy olyan dinamikus folyamat, ahol a megfertőzhetők egy része fertőzötté válik, a fertőzöttek pedig meggyógyulnak (vagy meghalnak). [20]

Játékelmélet – több személy közti kölcsönhatásokat elemez, amelyekben minden játékos hasznossága legalább egy másik játékos döntésétől is függ (pl. fogolydilemma). [3.1]

Jelenérték egy több időszakos törlesztési folyamat értéke, amelynél közömbös, hogy valaki a törlesztés helyett azonnal készpénzben fizet. [13.1]

Jelzáloghitelt lakásvételkor vesz föl az adós, és a teljes visszafizetésig a maradék adósság fejében a hitelező résztulajdonos marad. [13.1]

Jövedelemeloszlás a társadalom teljes jövedelméből az egyes csoportok részesedési aránya. [8.1]

Jövedelmi hatás: az áremelkedés csökkenti a fogyasztó reáljövedelmét. [21.2]

Kamat a hitel után időszakonként (havonta, évente) fizetendő összeg. [2.3]

Kamatláb a kamat és a tartozás hányadosa. [2.3]

Kamategyüttható = 1 + kamatláb. (Éves vagy negyedszázados.) [2.3]

Kaotikus rendszerben sok olyan kezdőérték van, amelyre a pálya előrejelezhetetlen. [7.2]

Kaotikus beruházási ingadozások esetén a beruházások pályája előrejelezhetetlen. [7.3]

Kereslet a fogyasztó ártól és jövedelemtől függő vételi szándéka. [2.3]

Keresztmetszeti pálya adott időben a különféle életkorúak változóinak együttese, profilja. [14.1]

Kezdőnyugdíj a nyugdíjazás első évében fizetett nyugdíj. [12.2]

Kifizetési tábla (i, j)-edik cellájában szereplő két szám rendre az 1. és a 2. játékos nyereménye, ha az 1. játékos az s_1^i (tiszta) stratégiát választja, a 2. pedig az s_2^j-t. [3.1]

Kiegyenlítési díj az az összeg, amelyet levonva a véletlen jövedelem időátlagából, a kockázatmentes csökkentett jövedelempálya hasznossága egyenlővé válik az eredeti kockázatos pályáéval. [17.1]

Kínálat a termelő ártól és profittól függő eladási szándéka. [2.3]

Kettős indexálású jelzáloghitelnél nemcsak a kamatláb, de a havi törlesztőrészlet is függ az inflációtól. [13.2]

Kevert stratégia a tiszta stratégiák véletlen sorsolásra bízott kiválasztása. [3.1]

Kombinált indexálás a bér- és az árindexálás kombinációja.

Kontrakciós (zsugorító) leképezésben a képpontok távolsága kisebb, mint a tárgypontoké. [7.1]

Kontraszelekció olyan folyamat, amelyben az önkéntes biztosítás díjszabásának egyetemessége megnöveli a nagyobb kockázatúak részvételét a rendszerben (például csak a hosszabb életűek vesznek életjáradékot). [17.3]

Korrelációs együttható két valószínűségi változó lineáris együtt mozgásának mértéke, –1 (ellentétes mozgás) és +1 (azonos irányú mozgás) közé esik. [18.1]

Költség a termeléssel járó bér- és tőkeköltség összege. [6.3]

Költségvetési feltétel azt mondja ki, hogy az egyén kiadásai egyenlők a jövedelmével. [5.2]

Költségvetési egyenleg az állam bevételeinek és kiadásainak a különbsége. [2.3]

Költségvetési hiány a negatív egyenleg abszolút értéke. [2.3]

Kötelező nyugdíjrendszerben a dolgozók rendszeresen járulékot fizetnek, s cserében időskorukban nyugdíjat – általában uniszex életjáradékot – kapnak. [10.1]

Közjavakat úgy fogyaszthatják az egyének, hogy mások fogyasztási lehetősége nem csökken (például rádióműsor hallgatása). [14.2]

Különadó egy képzeletbeli adó, amelyet a kormányzat vet ki a lakosságra, hogy az önkéntes nyugdíjrendszer támogatását fedezze. [11.1]

Külső adósság az ország éves fizetési mérleghiányainak kamatozott összege. [2.3]

Külső (externális) hatás nem tükröződik a piaci árban. (Például amikor a levegőt szennyező vaskohó nem fizet kártérítést a környék lakóinak a levegőszennyezésért.) [14.2]

Leértékel(őd)ési ütem: a hazai valuta egy év alatt százalékos leértékel(őd)ése egy külföldi kulcsvalutához képest – aktívan (passzívan). [13.3]

Legjobb válasz függvénye: a 2. játékos bármely stratégiája esetén maximalizálja az 1. játékos nyereményét. (Ha mindkét játékos stratégiája legjobb válasz a másikéra, akkor Nash-egyensúly valósul meg.) [3.1]

Legkisebb négyzetek módszere úgy határozza meg a regressziós egyenest, hogy a hibák szórása minimális legyen. [18.1]

Leontief-féle hasznosságfüggvény: a hasznosság a két termék fogyasztása közül a kisebbikkel egyenlő. (Például 2 balkezes és 1 jobbkezes kesztyű = 1 pár kesztyű.) [5.2]

Leszámítolási együttható egy 0 és 1 közötti szám, amely megmutatja, hogy a jövőbeli fogyasztás hasznossága hányadrésze az azonos jelenbeli fogyasztás hasznosságának. [5.3]

Makroökonómia a gazdaság működését nagy vonalakban, a részletek mellőzésével vizsgálja. [1.2]

Magánjavakat úgy fogyaszthatják az egyének, hogy mások fogyasztási lehetősége ugyanannyival csökken. [14.2]

Már megállapított nyugdíj a nyugdíjazás első éve után fizetett nyugdíj. [12.2]

Második legjobb megoldás a megengedettségi és az érdekeltségi feltételek mellett maximalizálja a társadalmi jólétet – aszimmetrikus információt feltételezve. [17.3]

Másodrendű differenciaegyenlet esetén a jövő állapot csak a jelen és az előző állapottól függ. [4.1]

Maximális részvételi díj esetén a játékosnak közömbös, hogy részt vesz-e a szerencsejátékban vagy sem.

Medián a csökkenő/növekvő sorba rendezett minta középső értéke. Például a béreloszlás mediánja kisebb, mint az átlaga, s ezért jobban jellemzi a közép jövedelmét. [8.1]

Megfigyelhető halmazokat a megfigyelő meg tudja különböztetni. Ellenpélda: két egyforma érme együttes feldobása esetén FI és IF nem különböztethető meg. [16.1]

Megfigyelhető halmazok ún. algebrája az a halmazcsalád, amelyben bármely két megfigyelhető halmaz együttese és metszete is megfigyelhető. [16.1]

Mikroökonómia a gazdaság működését részletekbe menően vizsgálja. [1.2]

Minimális nyugdíjkorhatár az az életkor, amelynek elérése előtt a megfelelő évjárat tagja csak rokkant nyugdíjat választhat, ha jogosult rá. [10.2]

Minimális részvételi díj esetén a kaszinónak közömbös, hogy nyitva tart-e vagy sem.

Morális kockázat, amikor a biztosítás miatt megnő a kárvalószínűség. [17.2]

Munkarészvételi hányad a dolgozók aránya a munkaképesek között. [10.1]

Nagy számok törvényei különféle feltevések mellett azt jósolják, hogy ha egy kísérletet nagyon sokszor függetlenül megismétlünk, akkor a bekövetkezés gyakorisága az elméleti valószínűséghez tart. [16.3]

Naiv várakozás esetén az előrejelzés az előző időszak tényleges értékével egyezik. [15.2]

Nash-egyensúly olyan stratégiakombináció, amelytől egyik játékosnak sem érdemes egyoldalúan eltérnie (pl. nemek harca). [3.1]

n-edrendű binomiális eloszlás a kétesélyes eloszlás n-szeres független megismétlésénél keletkezik. [16.1]

n-változós differenciaegyenletben a bal és a jobb oldalon n különböző változó szerepel, $t+1$, illetve t indexszel. [4.3]

Nemek harcában két tiszta és egy kevert Nash-egyensúly létezik, és nehéz köztük választani. [3.1]

Nominális változó folyóáras, nem veszi figyelembe a bér, a nyugdíj, az árfolyam értékvesztését. [12.1]

Nők40 nyugdíjszabály szerint minden magyar nő, aki legalább 40 évi jogosultságot szerez, csökkentés nélkül korhatár alatt nyugdíjba vonulhat. [19.2]

Növekedési együttható = 1 + növekedési ütem. [2.1]

Növekedési ütem a változó időbeli változása osztva a kiinduló értékkel. [2.1]

Nullaösszegű játékban a játékosok hasznosságfüggvényének összege azonosan 0. (Nagyon megszorító feltevés, bár 0 helyett állandó összeg is állhat: sakkban 1.) [3.1]

Nyugdíj az állam vagy a vállalat által rendszeresen fizetett időskori jövedelem. [10.1]

Nyugdíjba vonulási kor, amior a dolgozó nyugdíjba vonul: eltérhet az általános és a minimális korhatártól. [10.2]

Nyugdíjindexálás az az eljárás, amely a már megállapított nyugdíjat a következő évben infláció vagy béremelkedés arányában növeli. [10.1]

Nyugdíjjogosultsági hányad a nyugdíjasok és a nyugdíjaskorúak létszámának az aránya. [10.1]

Oligopóliumban néhány termelő verseng a fogyasztókért. [6.4]

Optimum az a helyzet, amelyben a lehetséges helyzetek közül a célfüggvény értéke maximális/minimális. [3.3]

Oszcillációnál a változók eltérése az egyensúlyi értéküktől szabályos időközökben előjelet vált. (Csillapítatlan oszcilláció: ciklus.) [4.2]

Önkéntes nyugdíjrendszerben a dolgozók időnként kényszer nélkül tagdíjat fizetnek, s cserében időskorukban egy összegben felvehetik az összegyűlt tőkét vagy nyugdíjat (életjáradékot) kapnak. [11.1]

Önrészesedés a biztosítási kárnak az a része, amely kimarad a kártérítésből. (Csökkenti a morális kockázatot.) [17.2]

Pálya diszkrét idejű dinamikus rendszerben, egymás utáni állapotok sorozata. [2.1]

Pareto-javítás esetén az új elosztás megvalósítható, mindenkinek legalább olyan jó, és egy valakinek jobb, mint az eredeti elosztás. [14.1]

Pareto-optimális elosztás esetén nem létezik más megvalósítható elosztás, amely mindenkinek legalább olyan jó, és egy valakinek jobb, mint a P-elosztás. (Ilyen a piaci elosztás.) [14.1]

Peremeloszlás egy kétváltozós eloszlás sor- vagy oszlopeloszlása. [16.2]

Periodikus pálya a ciklus általánosítása, amikor a folytonosított pálya nem ismétlődik, de az eltérésváltozó előjelváltása igen. [4.2]

Periódus a ciklus hossza, ennyi idő után ismétlődik a pálya. [4.2]

Piaci árigazodásban az új időszakban az áremelkedés a régi árhoz tartozó túlkereslettel arányos. [2.2]

Profit (másképp: haszon ≠ hasznosság) a vállalat bevétele és termelési költsége közti különbség. [6.4]

Racionális várakozás esetén a döntéshozó várakozása teljesül (Oidipusz megöli az apját). [14.1]

Ragadozó játék során a külső játékos fenyegető lépésének nem érdemes ellenállni. [3.1]

Reálárfolyam a nominális deviza-árfolyam és az hazai árszint hányadosa szorozva a külföldi árszinttel. [13.3]

Reálbér a nominális (folyó) bér és az árszint (árindex) hányadosa. [12.1]

Reálváltozó a nominális (folyóáras) változó és az árszint hányadosa. [12.1]

Reálkamatláb közelítőleg a nominális kamatláb és az inflációs ráta különbsége. (Pontosabban: a reálkamat-együttható = kamategyüttható/inflációs együttható.) [13.1]

Regressziós egyenes két valószínűségi változó közti lineáris kapcsolatot a legkisebb négyzetes hibával határozza meg. [18.1]

Relatív árszint megadja, hogy mennyit ér egy konvertibilis valutájú ország valutája az átlagos országhoz képest. (Például a forint árszintje alacsony az euróéhoz képest, azaz a vásárlóértéke nagyobb mint a piaci árfolyamon számított.) [19.1]

Relatív hatékonyság az a szám, amellyel beszorozva az alaprendszer jövedelmi paramétereit, a kapott társadalmi jólét megegyezik a vizsgált rendszer eredeti jövedelem melletti társadalmi jóléttel. [8.3]

Relatív megtakarítási hajlandóság az a szám, amellyel az aktív rövidlátó dolgozó átvétel előtt zsugorítja mások becsült önkéntes megtakarításait. [11.2]

Relatív változási sebesség az időegységre jutó változás és a változó aránya. [10.2]

Részleges biztosítás csak az önrészesedés fölötti részre vonatkozik. (Csökkenti a morális kockázatot, de rontja a biztonságot.) [17.2]

Rezervációs ár: a fogyasztó csak akkor veszi meg a terméket, ha annak ára ez alatt van. [5.1]

Rövidlátó dolgozók az optimálisnál kisebb mértékben (esetleg sehogy sem) gondoskodnak a jövőjükről. [11.2]

Rugalmasság azt mutatja, hogy az ár vagy a jövedelem 1%-os emelkedésekor a kereslet hány %-kal csökken, illetve nő. [5.1]

Sátorleképezés a sátor függőleges metszetét utánozza. [7.2]

Sertésciklus egy olyan árigazodási modellben keletkezhet, amelyben a kereslet késés nélkül, a kínálat viszont egyéves késéssel reagál a piaci árra. [2.2]

Skálahozadék megmutatja, hogy ha mind a tőkét, mind a munkát 2-szeresére növelik, hányszorosára nő a kibocsátás. (Állandó, növekvő és csökkenő.) [6.2]

Stabil egyensúlyi helyzet körüli állapotokból induló pályák közel maradnak az egyensúlyhoz, sőt, aszimptotikusan tartanak hozzá (lokálisan és globális, aszimptotikusan stabil). [2.1]

Stabil népesség korosztályi arányai időben állandók. [9.2]

Stacionárius népességben minden korosztály létszáma időben állandó. [9.2]

Standardizált valószínűségi változó az eredetiből a várható érték levonásával és a különbség szórással való osztásával adódik. [16.2]

Statisztika a valószínűség-számítás alkalmazása, amikor a kimenetekből visszafelé megjósoljuk a bemenetek valószínűségét. [18.1]

Stratégia gondosan végiggondolt döntés (gyakran többlépcsős). [3.1]

Származtatott hasznosságfüggvény az eredeti hasznosságfüggvényből a költségvetési feltétel behelyettesítésével adódik. [5.2]

Szerencsejátékban a játékosok okossága mellett a szerencse is, pl. a lapjárás is befolyásolja a kimenetet. [17.4.]

Szimmetrikus játék esetén a két játékos stratégiahalmaza azonos, és a 2. játékos hasznosságfüggvény az 1. játékos hasznosságfüggvényéből a változók felcserélésével adódik. [3.1]

Szintvonal az azonos függvényértékű pontok halmaza. (A térképen például a 900 m magassági szintű pontok a Bükk-fennsík jelentős részét körbezárják.) [6.3]

Szórásnégyzet: egy valószínűségi változónak a várható értékétől való különbségét négyzetre emeljük, és ennek a várható értékét vesszük. [16.2]

Támogatási kulcs az egy forintnyi önkéntes pénztárbeli (és társainak fizetett) tagdíj után a kormányzat által fizetett kiegészítés. [11.1]

Társadalmi jóléti függvény az egyéni hasznosságfüggvények szimmetrikus függvénye, például átlaga. [8.2]

Társadalombiztosítási (röviden tb) nyugdíj, amely a felnőtt társadalom zömére kiterjeszti az egészségügyi- és nyugdíjbiztosítást. [10.1]

Teljes termékenységi együttható a népesség egy nőtagja által életében megszült gyerekek átlaga. [9.2]

Termelési függvény a kibocsátást a tőke és a munka mennyiségével, valamint a műszaki fejlődés előrehaladásával határozza meg. [5.1]

Tiszta stratégia a véges játék alapstratégiája, keverésükből születik a kevert stratégia. (Például az érmepárosításban F vagy I.) [3.1]

Tőkésített nyugdíjrendszerben minden nemzedék magának takarékoskodik (ellentéte a felosztó–kirovó rendszer). [10.1]

Túlélési valószínűség megadja, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy egy egyén egy adott korcsoportból egy következő korcsoportba kerül. [9.2]

Valorizálás a kezdőnyugdíjak kiszámításánál a korábbi egyéni keresteeket az átlagos bérnövekedéssel számítja be.

Valószínűség-eloszlás (diszkrét) 1-dimenzióban egy olyan számsorozat, amelynek tagjai pozitívak és összegük 1. [16.1]

Valószínűség-számítás elemi események valószínűsége ismeretében összetett események valószínűségét számítja ki. [16.1]

Valószínűségi változó diszkrét esetben adott eloszlás minden eleméhez meghatározott számot rendel (például kockadobásnál $1, 2, \dots, 6$.). [16.1]

Várható érték egy valószínűségi változó súlyozott átlaga. [16.2]

Várható hasznosság a biztosítás nélküli esetben bekövetkező szerencsétlen kimenet (van kár) + szerencsés kimenet (nincs kár) együttes hasznossága, amely eltér az egyéni kimenetek súlyozott átlagától. (Példa: annak ellenére érdemes lehet hetente 1 szelvénnyel lottózni, hogy a szelvény 250 Ft-os árából csak 100 Ft nyereményre számíthatunk.) [17.1]

Versenyegyensúlyban olyan sok azonos méretű vállalat verseng egymással, hogy a piaci ár a költségre süllyed. A keresletet viszont a még számosabb fogyasztók versengése tartja fent. [6.4]

Hivatkozások[1]

Czeglédi Tibor–Simonovits András–Szabó Endre–Tir Melinda (2016): „A nyugdíjba vonulási szabályok hatása: nyertesek és vesztesek”, *Közgazdasági Szemle 63*, 473–500.

Eső Péter–Simonovits András (2003): „Optimális járadékfüggvény tervezése rugalmas nyugdíjrendszerre”, *Közgazdasági Szemle 50,* 99–111.

Garay Barnabás–Simonovits András–Tóth János (2012): „Local Interaction in Tax Evasion”, *Economics Letters 115*, 412–415.

Hódi Endre (1964/1998): Szélsőérték-feladatok elemi megoldása, Bp., Typotex.

Király Balázs–Simonovits, András (2016): „Megtakarítás és adózás egy önkéntes nyugdíjrendszerben”, *Közgazdasági Szemle 63*, 473–500.

Király Júlia–Simonovits András (2015): „Jelzáloghitelek forintban és devizában – egyszerű modellek”, *Közgazdasági Szemle 62,* 1–26.

Mérő László (1996): Mindenki másképp egyforma, Bp.

Molnár György–Simonovits, András (1996): „Várakozások, stabilitás és működőképesség az együttélő korosztályok realista modelljében”, *Közgazdasági Szemle 43*, 863–890.

Simonovits András (2012): „Szakaszokon értelmezett leképezések fix pontjai”, *KöMaL, 61* 264–273.

Simonovits András (2013): „Három népességdinamika modell,” *KöMaL, 62,* 131–139.

Simonovits András (2014): „A jelzáloghitel legegyszerűbb modelljei” *KöMaL, 64,* 450–457.

Simonovits András (2016): „Egyensúly, ciklus és káosz dinamikus rendszerekben,” *KöMaL, 65*, 258–267.

Simonovits András (2017): „Csebisev algebrai egyenlőtlensége és egy új közgazdasági alkalmazása”, *KöMaL, 67,* 72–75.

Simonovits András (2018): „Adómorál és adózás: két modell”, *KöMaL, 68,* 194–200.

Simonovits András–Tóth János (2007): „éj eredmények az optimális nyugdíjjáradékfüggvény tervezéséről”, *Közgazdasági Szemle 54*, 628–643.

Simonovits András (2020): „Egy egyszerű járványmodell”, *KöMaL, 70,* 201-204.

[1] A plagizációt és az önplagizációt elkerülendő, csak olyan forrásokra hivatkozom, amelyeket – gyakran társszerzőkkel – írtam, vagy jelentős mértékben használtam.